FÓKUSZBAN A TANULÓ
Tanulmányok Szendrei Julianna emlékére

Szerkesztette:
Szitányi Judit

Budapest, 2014

Szerkesztő
Szitányi Judit

A kötet lektorai
M. Nádasi Mária egyetemi tanár, professor emeritus
Vásárhelyi Éva egyetemi decens
Kónya Eszter adjunktus

Technikai szerkesztő:
M. Pintér Tibor

A kötet megjelentetését a *TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007 „Országos koordinációval a pedagógusképzés megújításáért”* projekt támogatta.

ISBN 978-963-284-556-2

Felelős kiadó
az ELTE Tanító- és Óvóképző Kar dékánja

Szendrei Julianna

Tartalomjegyzék

Előszó 9

Nahalka István
AZ ESÉLYEGYENLŐTLENSÉGEK KELETKEZÉSÉNEK MODELLJEI 10

Gosztonyi Katalin
VARGA TAMÁS MATEMATIKAOKTATÁSI REFORMJA ÉS AZ „ÚJ MATEMATIKA” 16

Dancs Gábor
A RÉGI ÉS AZ ÚJ TALÁLKOZÁSA AZ OKTATÁSBAN 21

Lénárd András
A DIDAKTIKA HELYZETE A NEVELÉSTUDOMÁNYON BELÜL 32

Villányi Györgyné
ÖRÖKÉRVÉNYŰSÉG ÉS AKTUALITÁS AZ ÓVODAI „MATEMATIKAI” NEVELÉSBEN 38

Domonkos Katalin
A DIGITÁLIS TEVÉKENYSÉG ÉS VISELKEDÉS KOMPETENCIA KÖZÖSSÉGI DIMENZIÓJÁNAK VIZSGÁLATA 43

Paolo Boero
FOLLOW UP OF A PAPER BY JULIANNA SZENDREI & JUDIT TÖRÖK: DEVELOPING ARGUMENTATIVE SKILLS IN PRIMARY AND LOWER SECONDARY SCHOOL IN ITALY 50

Ildar Safuanov
TEACHING PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS TO SOLVE NON-STANDARD PROBLEMS 55

Korándi József
A FELSŐFOKÚ MATEMATIKATANÍTÁS NÉHÁNY DIDAKTIKAI SAJÁTOSSÁGA 60

Vancsó Ödön – Szitányi Judit
KONFLIKTUSOK A VALÓSZÍNŰSÉGFOGALOM KIALAKÍTÁSA KAPCSÁN 64

Szabó Ildikó – Fenyvesi Kristóf – Stettner Eleonóra
ÉLMÉNYKÖZPONTÚSÁG, FACILITÁCIÓ ÉS KOOPERATÍV MÓDSZEREK A MATEMATIKATANULÁSBAN 70

Pintér Krekić Valéria – Mrđa, Mirela – Lazić, Bojan
KÜLSŐ ÉS BELSŐ DIFFERENCIÁLÁS AZ ALSÓ TAGOZATOS MATEMATIKAOKTATÁSBAN 83

Szabó Zoltán
LÁTÓKÖR-SZÉLESÍTÉS NEMEUKLIDESZI MODELLEK (INFORMATIKAI ESZKÖZÖKÖN TÖRTÉNŐ) KIPRÓBÁLÁSÁVAL 93

Ekéné Abuczki Marianna
TÉRSZEMLÉLET VIZSGÁLATA A 14 ÉVES KOROSZTÁLY KÖRÉBEN 102

Stankov Gordana
JÁTSZVA TANULJUK A LINEÁRIS EGYENLETEK MEGOLDÁSÁT MÉRLEGELVVEL 112

Krisztin Német István
„GONDOLOD, HOGY IGAZ? VAGY MÉGSE?” 116

Szendrei Julianna publikációi 125

Előszó

A kötetben megjelenő cikkek a neveléstudomány, a matematikadidaktika, valamint a játék témakörében készültek, többnyire kutatásokhoz kapcsolódó tevékenységek, tapasztalatok és azok eredményei alapján. E kötet megjelenéséhez Szendrei Julianna kollégái, tanítványai, hazai és nemzetközi kutatásokban résztvevő munkatársai, valamint doktoranduszhallgatók járultak hozzá írásaikkal. Ezzel, valamint a témák különbözőségével tisztelegni kívánunk Szendrei Julianna sokoldalúsága előtt, aki számos hazai és nemzetközi kutatás vezetője, koordinátora vagy résztvevője volt. A matematikadidaktika területén végzett kutatásai mindenkor a gyakorlat jobbítását célozták. Több kapcsolódó tudományterületben is alapos tájékozottságot szerzett. Érdeklődéssel tanulmányozta a fejlődéslélektan, az agykutatás, a drámapedagógia, általános pedagógia hazai és nemzetközi eredményeit, vizsgálta a tanulási nehézségek eredetét, a matematikatanulás problémáit, valamint az anyanyelvi fejlődés és a matematikai nevelés kapcsolatát. Érdekelte a játék matematikája, a valószínűségi gondolkodás fejlődése, illetve szívügye volt a geometriai gondolkodás, geometriai látásmód fejlesztése. Jó érzékkel és nagy rálátással kapcsolódott a folytonosan változó, fejlődő informatika világához.

Külön figyelmet szentelt a hátrányos helyzetű tanulók segítésének. Komoly részt vállalt a tanítóképzés módszertanának kutatásában, és szívén viselte az óvodapedagógus-képzést. Kutatási eredményeiről magyarul és több más nyelven is beszámolt hazai és nemzetközi konferenciákon. Könyveinek, tanulmányainak, szakcikkeinek száma jelentős.

Művelt, a tudományok, a művészetek, a természet szépségei iránt fogékony ember volt. Szerette a zenét, élvezte a képzőművészeti alkotásokat, maga is rajzolt, geometriai alkotásai művészi tehetséget mutatnak.

Kínálni tudta a szépet, az igazat, és hagyta, hogy ki-ki annyit vegyen gazdagságából, amennyire szüksége, igénye, vágya van.

Sokan, sokat tanulhattunk tőle.
A kötetet Szendrei Julianna emlékére hoztuk létre.

A szerkesztő

AZ ESÉLYEGYENLŐTLENSÉGEK KELETKEZÉSÉNEK MODELLJEI

Nahalka István

oktatáskutató
ELTE, PPK

A oktatás méltányossága, az esélyegyenlőtlenségek csökkentése a modern oktatás kulcskérdése. De vajon akkor tettük a legtöbbet a problémák megoldásáért, ha megoldottuk a szegregáció problémáját? A tanulók egymástól való elválasztása, a homogén csoportok létrehozása számos nevelési szempontból káros hatású folyamat – ezt ma már tudjuk. A deszegregáció tehát parancs. Ám sajnos önmagában nem oldja meg az esélyegyenlőtlenség problémáját. Erre csak a pedagógusok képesek az osztálytermekben, ha leküzdik a legtöbbször csak látens formában, de súlyosan ható diszkriminációt, és képesek valóban a tanulókhoz, kulturális sajátosságaikhoz, igényeikhez, fejlődésük szükségleteihez igazodva nevelni, tanítani. Ehhez az egész probléma új látásmódja szükséges. A matematika tanításában is. És ez a kulcsa a tehetségnevelés megújításának is. Magyarországon megdöbbentően szűk azoknak a tanulóknak a köre, akikből tehetség lehet egyáltalán, akikről kiderülhet, hogy például kiváló matematikusok lehetnek. Ennek oka a diszkrimináció, ami a magyar oktatási rendszer működésének egyik alapvonása.

Szendrei Julianna sok mindennel foglalkozott. Fontos szerepet játszott életében az, amit a hátrányos helyzetűekért, az esélyegyenlőtlenségek csökkentéséért tett. Juli tagja volt a Komp csoportnak, annak a pedagógiai szakemberekből szerveződő közösségnek, amely a 90-es évek elején alakult Loránd Ferenc vezetésével arra, hogy elterjessze Magyarországon a komprehenzív iskola gondolatát. Részese volt annak a folyamatnak, amelyben sok száz pedagógushoz eljutottunk a befogadó, együtt nevelő, mindenféle diszkriminációt kizáró iskola koncepciójával (Loránd 1997). Juli e munka keretei között foglalkozott a matematika tanításával, azzal, hogyan kellene az iskolában társadalmi megkülönböztetések nélkül tanítani ezt a tantárgyat, de foglalkozott az általános kérdéssel is: hogyan lehetne igazságosabb a hazai iskolarendszer.

Feladat volt bőven, és ma is nagyon sok van e téren. Magyarország azon országok sorába tartozik, amelyekben rendkívül erős az összefüggés az iskolai tanulók szociális helyzete és a tanulási eredményeik között. Egyszerű, jól ismert, ám a legtöbb szakember szerint az iskolarendszer számára a legsúlyosabb problémát jelentő összefüggésről van szó: a magasabb társadalmi státussal rendelkező szülők gyermekei jóval nagyobb valószínűséggel szereznek az iskolában magasabb színvonalú tudást, mint a rosszabb helyzetben lévő gyerekek. A PISA, a TIMSS, az IALS és más nemzetközi összehasonlító vizsgálatok világosan

rámutattak erre az összefüggésre. Csak egy példát említve: 2009-ben is és 2012-ben is az OECD országai körében Magyarországon volt a legerősebb az összefüggés a PISA szövegértés teszt eredményei és a szociális helyzetet jellemző szocioökonómiai státus változója között. A teszteredmény varianciájából a legnagyobb arányt nálunk magyarázta a szociális helyzet (OECD 2010, 2013).

Miért rossz ez? Minimum két ok említhető. Az egyik az igazságtalanság. Sok-sok gyermek azért nem jut kellően magas szintre az oktatásban, mert olyan családba született, amelyből indulva – ezt mutatja minden kutatási eredmény – nehezebb, sokkal nehezebb megszerezni a magas színvonalú tudást. Olyasmiért kerülnek egy évfolyamból több tízezren hátrányos helyzetbe, amiről nem tehetnek, aminek az esetek egy nagy részében nincs köze adottságaikhoz, a bennük rejlő lehetőségekhez. Ha egy társadalom ilyen igazságtalan szisztémát működtet, annak messze ható következményei vannak az egész társadalom erkölcsiségére, önbecsülésére, illetve belső integráltságára nézve is.

Az esélyegyenlőtlenségek kirívóan magas szintjének másik, még inkább kézzel fogható következménye az egész társadalmat érinti (Kertesi és Kézdi 2006). A hátrányos helyzet negatív következményei nem korlátozódnak az ezt a helyzetet elszenvedő emberekre. Az egyenlőtlenségek rendszere sok-sok gyermeket zár el a felemelkedés lehetőségétől. E gyermekek között ugyanolyan arányban találhatók olyanok, akik egy „normális" iskolarendszerben tehetséges tanulókká válnának, jó tanulási eredményeket érnének el, magas szintre jutnának, mint minden más társadalmi csoportban. Erre azonban nincs lehetőségük, aminek az az egyik következménye, hogy a tehetségnevelés bázisa leszűkül. Ha egy társadalom tagjai felének, harmadának, negyedének van csak esélye arra, hogy magas szintű tudást szerző szakemberré váljék, az csökkenti azoknak a számát, akik különösen magas szintű képességeket szereznek, és kiemelkedő szerepet töltenek be majd a társadalom életében. A tehetségnevelésnek Magyarországon ez a központi problémája, mindannyiunké, mert a tehetségnevelés bázisának leszűkülése az egész társadalomra rendkívül negatív hatással van.

Az esélyegyenlőtlenségek kirívóan magas szintje tehát súlyos társadalmi és ezen belül oktatási probléma. Hogy meg tudjuk oldani, ahhoz jó diagnózissal kell rendelkeznünk, és ezen belül is elsősorban megalapozott válaszokat kell adnunk az okokra vonatkozó kérdésekre. Az esélyegyenlőtlenségek kialakulásával és magas szintjével, tehát a hátrányos helyzet létrejöttével kapcsolatban három alapvető gondolkodásmóddal kell számolnunk. Az a kérdés, hogy az egyes paradigmák képviselői mit mondanak az okokról, egyáltalán, mit gondolnak a hátrányos helyzet mibenlétéről, illetve miben látják a megoldás lehetőségeit.

Az elsőnek említendő hozzáállás lényege, hogy a hátrányos helyzet kialakulása okainak forrását az iskolán, az oktatási rendszeren kívülre helyezi. Talán ez a leginkább elterjedt szemléletmód, amelyben az iskolai, tanulási hátrányos helyzet azonossá válik a társadalmi értelemben használt hátrányos helyzet fogalommal. A család szocioökonómiai státusa ebben a felfogásban nagymértékben meghatározza a tanulók tanulási lehetőségeit. A rossz szociális helyzet egyértelműen rányomja a bélyegét az iskolai tanulmányokra, az ilyen helyzetű tanulók a többiekhez képest rosszabb előzetes tudással, gyengébben fejlett képességekkel rendelkeznek, eleve rosszabbul kommunikálnak, értékrendszerük, magatartásuk, társadalmi normákhoz való viszonyuk jelentős

akadályát képezi a sikeres iskolai tanulásnak. Ebben a képben az iskola jórészt kiszolgáltatott helyzetben van e területen, amit tenni tud, az a felzárkóztatás, a külön pedagógiai források biztosítása a hátrányos helyzetű tanulók segítésére. Ez a nézet tehát deficitekről szól, arról, hogy a hátrányos helyzetű tanulók sok mindenben, ami kellene a jó iskolai eredmények eléréséhez, hiányt szenvednek. Nem véletlen, hogy ez a gondolkodásmód a szakmában a „deficit-modell" elnevezést kapta (Dudley-Marling 2007).

A második, különösen az oktatáspolitikusok körében elterjedt, de komoly szakmai nyilvánosságot is elnyert paradigma nevezhető „szegregáció-modellnek". Lényege, hogy az esélyegyenlőtlenségek akkor jönnek létre, amikor az iskolarendszer egy alapvető szelekció keretei között elkülöníti egymástól a különböző társadalmi háttérrel rendelkező tanulókat (Kertesi és Kézdi 2004). E felfogás szerint az elkülönítés megakadályozza, hogy az eleve hátrányokkal induló tanulók behozzák lemaradásaikat. Az elkülönítés, tehát a szelekció mindig összekapcsolódik a rosszabb helyzetben lévő tanulók, osztályaik, iskoláik, sőt, iskolatípusaik (ld. szakiskola) méltánytalan körülmények közötti tanulásával, működésével. Így válik a negatív megkülönböztetést is hordozó szelekció szegregációvá. Az együttnevelés hiánya megakadályozza, hogy a tanulók egymást segítve tanuljanak, a felkészültebb tanulók pozitív hatást gyakoroljanak a gyengébbekre, illetve egyáltalán, a tanulás terén mintát jelentsenek a számukra. Ez a szemléletmód a megoldást a szegregáció megszüntetésében látja. Elsősorban a teljes iskolarendszer szintjén kell megtenni mindent, hogy alapvetően a különböző társadalmi csoportokhoz tartozó gyermekek együttnevelése jellemezze az iskolákat, illetve az egész nevelést. Olyan oktatáspolitikára van szükség – ezen megfontolás szerint – amely megakadályozza a szegregációt mind a rendszer egészének szintjén, de magukban az intézményekben is. Az ilyen oktatáspolitikák eltérő arányban tartalmazhatnak előíró, bizonyos értelemben erőszakos eszközöket, szabályozást, és ennek megfelelően eltérő lehet a pedagógusok, a szülők és a tanulók viszonya a törekvésekhez.

A „szegregáció-modell" már valószínűleg kevésbé elterjedt mind általánosan, mind a szakmai körökben. Magyarországról van persze szó, hiszen a fejlett társadalmak akár jelentős mértékben eltérő stratégiákat alakítottak ki az esélyegyenlőtlenség probléma megoldására. Ám a szakmailag a leginkább reményt keltő harmadik gondolkodásmód, amelyet „látens diszkrimináció-modellnek" nevezhetünk, a legkevésbé elterjedt. Nyilván a másik két modellel való elégedetlenség hívta részben életre.

A „deficit-modell" szinte eszköztelenné teszi az iskolát. Tudomásul kell vennünk, hogy nincsenek felszabadítható pedagógiai források, legalábbis extenzív értelemben. Nincs több idő, nincs nagyobb munkamennyiség, amelyet pozitív diszkriminációval a hátrányos helyzetű tanulók „felzárkóztatására" lehetne fordítani. A „deficit-modell" nem képes számot adni arról, hogy számos tudományos kutatás eredménye szerint az iskola tovább növeli a már a kezdetekkor is érvényesülő egyenlőtlenségeket. Vagyis az iskola nem annyira „ártatlan" ebben a kérdésben, mint azt ez a gondolkodásmód állítja.

A „szegregáció-modell" nyilván rendkívül fontos összefüggést fogalmaz meg akkor, amikor kárhoztatja az elkülönítést, vagyis azt a megoldást, amelyben a különböző társadalmi rétegekhez tartozó tanulók tapasztalatszerzése az együttműködéssel kapcsolatban erősen korlátozott. Ugyanakkor a szegregációnak ez a kétség kívül rendkívül negatív hatása, ennek az elfogadása még nem jelenti azt, hogy megtaláltuk a tanulási eredmé-

nyek tekintetében mutatkozó hátrányok keletkezésének legfőbb okát. Magyarországon is találunk szép példákat arra – hadd említsem most csak a Hejőkeresztúri Általános Iskolát –, hogy képes egy iskola a társadalmi szegregáció eredményeként kényszerűen kialakult szelekció körülményei között is egészen kiváló munkát végezni. Hejőkeresztúron igen nagy mértékben túlreprezentáltak az iskolában a roma gyerekek, a halmozottan hátrányos helyzetűek, az iskola mégis kiváló eredményeket ér el. Nem jó természetesen, hogy Hejőkeresztúron, vagy bárhol máshol a szelekció eredményeként homogén társadalmi összetételű iskolák alakulnak ki, hiszen ez akadálya az eltérő társadalmi csoportokhoz tartozók együttműködése jó formálódásának, de nem jelent feltétlenül magyarázatot az alacsony szintű tanulási eredményekkel kapcsolatban.

A harmadik szemléletmód az okokat, a hátrányos helyzet forrását a diszkriminációban keresi (Acedo, Amadio és Opertti 2009, Erőss és Gárdos 2008). A diszkrimináció lehet jól látható, manifeszt, ekkor szinte biztos, hogy a helyzet a jogszabályoknak sem felel meg. Ám még erősebb a hatása a látens diszkriminációnak, részben azért mert nem közvetlenül látható, nem nyilvánvaló. A látens diszkrimináció a tanítás-tanulás, tágabban a nevelés folyamatában történik, az osztálytermen belül, a közvetlen tanuló-pedagógus kapcsolatokban. Megértéséhez alapvető jelentősége van annak, hogy jól lássuk, mit állít ez a paradigma a hátrányos helyzetbe kerülő tanulókról, tudásukról, képességeikről, kommunikációjukról és magatartásukról.

E harmadik szemléletmód sajátos állításokat fogalmaz meg arról, hogy milyen állapotban kerülnek be a gyermekek a köznevelés intézményrendszerébe. Erről a legtöbben úgy gondolkodnak, ahogy azt bemutattuk a „deficit-modell" elemzése során. Hiányokról van szó, elmaradásról, gyengeségekről. A „látens diszkrimináció-modell" szerint nem ez a helyzet. Azt állítja, hogy az iskolában hátrányos helyzetet elszenvedő gyerekek nem indulnak kevesebb ismerettel a közoktatásban. Ismereteikről azt mondhatjuk inkább, hogy a társadalmi élet más terepeiről származnak, mint társaik ismeretei. A többiekhez képest eltérő kulturális közegből érkező gyerekek is tudnak annyit a világról, csak éppen olyan területeken, amelyek az iskolai tanulásban kevésbé kerülnek szóba. Az sem látszik igaznak, hogy képességeik szignifikánsan, és globálisan fejletlenebbek lennének. „Egyszerűen" arról van szó, hogy más képességeik fejlettek, nem azok, amelyek tekintetében középosztályi közegből érkező, általában gazdagabb családokból származó társaik fejlettebbek. A sajátosság az, hogy az iskolai tanulás során azok a képességek játszanak majd fontos szerepet, amelyek az utóbbi csoport tagjaiban fejlettebbek. Rosszabbul kommunikálnak vajon a szociálisan hátrányos helyzetű tanulók? Ha csak a verbális kommunikációról van szó, akkor ez a helyzet. Ám a kommunikáció nem azonosítható annak verbális formájával. A szociálisan hátrányos helyzetű tanulók más kommunikációs csatornákon lehetnek fejlettebbek. Mit használ viszont elsősorban az iskola? Természetesen a verbális kommunikáció prioritása egyértelmű. És nagyon hasonlókat lehetne mondani a tanulók érték- és normarendszeréről, kulturálisan meghatározott magatartásformáiról is.

Mi a közös ezekben? Az, hogy az iskola egyoldalúan preferálja azokat a tanulási előfeltételeket, amelyekkel a középosztályhoz tartozó családok gyermekei rendelkeznek sokkal nagyobb valószínűséggel. A szociálisan hátrányban lévő tanulók nem e helyzetük miatt lesznek tanulási értelemben is hátrányos helyzetűek, hanem azért, mert nem

azt kapják a fejlesztés folyamatában, ami sajátos tudásuknak, a bennük fejlett képességeknek, sajátos kommunikációs felkészültségüknek, értékeiknek, megtanult szabályaiknak megfelelnének. Az iskola – természetesen az iskolák, a pedagógusok többségéről van szó, tisztelet a kivételeknek – nem képes megfelelően igazodni a tanulók sajátos jellemzőihez, az általános értelemben vett érdemi pedagógiai differenciálás, más kifejezéssel élve az adaptív pedagógia nem érvényesül a legtöbb intézményben. Ebben a helyzetben a szociális értelemben vett hátrányos helyzet (szegénység, szociokulturális hátrány) fokozatosan, illetve sokszor drámai gyorsasággal tanulási egyenlőtlenséggé transzformálódik. És ne szépítsük: erről az iskola tehet. A pedagógiai hatás hozza létre mintegy a tanulási hátrányos helyzetet, méghozzá már a közoktatásban a gyermek által eltöltött első években. Látens diszkriminációról van szó, a kirekesztés nem „látványos", nem nyilvánvaló.

A probléma megoldása elsőrendűen pedagógiai fejlesztést igényel. A manifeszt diszkrimináció lényegesen enyhíthető az amúgy általában meglévő, és megfelelő jogszabályok betartásával, betartatásával. A látens diszkrimináció megszüntetése azonban nem tehető kötelezővé, nem rendelhető el. Új, adaptív megoldásokra, módszerekre, innovatív pedagógiai tevékenységre van szükség. Őszintén be kell vallani, ennek részleteit még nem ismerjük elég jól. A neveléstudomány, a pedagógiai fejlesztés még nem volt képes megfelelő megoldásokat ajánlani a pedagógusok, az iskolák számára minden területen.

Az esélyegyenlőtlenségek „látens diszkrimináció-modellje" is kárhoztatja a szegregációt. Részben azért, mert minden szegregációban van diszkrimináció, tehát bizonyos mértékig eleve korlátozza bizonyos társadalmi csoportokhoz tartozók iskolai lehetőségeit. De nagyon jelentős valóban a szegregációnak a társadalom integráltságának formálódására kifejtett negatív hatása. Ha viszont nem vesszük komolyan a látens diszkrimináció jelentős hatását a tanulás eredményeire, és pusztán a szegregációval szemben vesszük fel a harcot, akkor – legalábbis a harmadik paradigma képviselői szerint – elvétjük a célokat.

Magam ehhez a harmadik paradigmához részben Szendrei Julianna hatására jutottam el. Ő volt az, aki a Komp csoportban állandóan felhívta a figyelmünket arra, hogy az osztályban, a tanítás-tanulás folyamataiban zajló, esélyegyenlőtlenségeket növelő hatásokra is nagyon oda kell figyelnünk. A komprehenzív iskolák számára készült matematikai oktatási programjaival következetes volt ennek az elvnek a követésében. Juli hatásának is köszönhető, hogy a Komp csoport – a kezdetekben egyértelműen és csakis a szegregáció ellen megfogalmazott programján túllépve – kiterjesztette tevékenységét, és a diszkrimináció legkülönbözőbb megnyilvánulásaira adott válaszként egyre inkább a tanórákon zajló folyamatok felé fordította a figyelmét. Köszönjük Juli.

Irodalomjegyzék

Acedo, C. Amadio, M. és Opertti, R. (2009): *Defining an Inclusive Education Agenda: Reflections around the 48th session of the International Conference on Education.* Unesco International Bureau of Education, Geneva.

Dudley-Marling, C. (2007): Return of the deficit. *Journal of the Educational Controversy, 2* (1).

Erőss Gábor és Gárdos Judit (2008): Előítéletes társadalom vagy diszkriminatív iskola? A cigányellenesség és a hátrányos megkülönböztetés közötti különbségről. In Erőss Gábor és Kende Anna (Szerk.) *Túl a szegregáción. Kategóriák burjánzása a magyar közoktatásban.* L'Harmattan, Budapest, 49–82.

Kertesi Gábor és Kézdi Gábor (2004): *Általános iskolai szegregáció – okok és következmények*. Budapesti Munkagazdaságtani Füzetek, BWP 2004/7. MTA Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest.

Kertesi Gábor és Kézdi Gábor (2006): *A hátrányos helyzetű és roma fiatalok eljuttatása az érettségihez. Egy különösen nagy hosszú távú költségvetési nyereséget biztosító befektetés.* MTA Közgazdaságtudományi Intézet, Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.

Loránd Ferenc (1997): Az egységes iskoláról. *Új Pedagógiai Szemle*, 1, 3–19.

OECD (2010): *PISA 2009 Results: Overcoming Social Background Equity in Learnig Opportunities and Outcomes.* OECD, Paris.

OECD (2013): *PISA 2012 Results: Excellence through Equity. Giving Every Student the Chance ti Sudcceed. Vol. II.* OECD Paris.

VARGA TAMÁS MATEMATIKAOKTATÁSI REFORMJA ÉS AZ „ÚJ MATEMATIKA"

Gosztonyi Katalin

A Varga Tamás vezette „komplex matematikaoktatási reform" – amelynek első, kísérleti fázisa 1963-ban indult, 1978-ra pedig az új országos tanterv alapjává vált – meghatározó szerepet tölt be a magyar matematikaoktatás történetében, hatása máig érezhető. Ez a reform egyúttal illeszkedik a korszak nemzetközi reformmozgalmainak sorozatába, amelyet összefoglaló néven „új matematikaként" (angolul „new math", franciául „mathématiques modernes") szokás emlegetni. Varga Tamás számos különböző országban folyó kísérletet, reformot kísért figyelemmel, ezek tanulságait felhasználva saját kísérleteihez – bizonyos témákban (pl. valószínűségszámítás) pedig maga is nemzetközi hatású munkákat publikált.

A '60-as évek nemzetközi reformmozgalmaiban több különböző jellegű hatás is érvényesült, ezek közül néhányat emelek itt ki. Világszerte, de különösen Franciaországban játszott jelentős szerepet az ún. Bourbaki-csoport matematikája. Ezt a csoportot francia matematikusok hozták létre az 1930-as években azzal a céllal, hogy elkészítsék a matematika új szintézisét: halmazelméleten alapuló, egységes formális nyelvet használó axiomatikus-deduktív rendszerbe foglalják a modern matematika egészét. A csoport munkája az egész 20. századi matematikára jelentős hatást gyakorolt, és ez a hatás érvényesült az '50-60-70-es évek matematikaoktatási reformmozgalmaiban is: ennek köszönhető világszerte, így Franciaországban és Magyarországon is új matematikai témák, pl. a halmazelmélet bekerülése a tantervbe, vagy a „számtan-mértan" helyett egy egységes „matematika" tantárgy bevezetésére való törekvés.

Jelentős hatása volt a kor matematikaoktatására pszichológiai kutatásoknak is, elsősorban Piaget-nek: ennek a hatásnak tulajdonítható többek között a tanulók tevékenykedtetésére való törekvés, a manipulációs eszközök és játékok elterjedése az alsó tagozatos matematikaoktatásban. Számos országban kísérleteztek pl. Dienes Zoltán játékaival vagy az itthon „színes rudakként" is ismert Cuisenaire-rudakkal.

Magyarországon ezek mellett a nagyrészt francia gyökerű, világszerte érvényesülő hatások mellett egy olyan, többek között Kalmár László, Péter Rózsa, Rényi Alfréd, Pólya György, vagy akár Lakatos Imre által képviselt matematikafelfogás és matematikaoktatási hagyomány is érvényesült, amely sok szempontból eltér Bourbakiétól. Kalmár, Péter Rózsa, Rényi, Varga Tamás vagy Surányi János az 1940-es években mind részt vettek a Karácsony Sándor körül kialakult gondolkodói kör munkájában, ennek nyomai is tetten érhetők matematikaoktatásról való gondolkodásukban. Matematika-népszerűsítő, és

esetenként matematikafilozófiai műveikből, matematikaoktatásról szóló előadásaikból kiolvasható néhány közös alapelv[1]:

- A matematikát nem statikusnak és örökérvényűnek, hanem az emberi szellem folyamatosan fejlődő, változó alkotásának látják. Ezen a fejlődési folyamaton kell szerintük végigsegíteni a matematikát tanulókat is.
- A matematika forrása szerintük a szemlélet, a tapasztalat. (De ezen nem feltétlenül e szavak elsődleges, fizikai jelentését kell érteni!) Enélkül sem matematikai alkotó tevékenység, sem igazi megértés nem lehetséges – ezért az oktatás minden szintjén hangsúlyt kell helyezni a szemlélet bőséges tapasztalatgyűjtésen alapuló fejlesztésére.
- A matematikai tevékenység alapvetően dialogikus jellegű, kérdések, problémafelvetések és erre adott válaszkísérletek sora. A matematika oktatása nem egyirányú ismeretátadás, hanem a tanulók és a tanár közös tevékenysége: a tanár a tanulók segítőjeként lép fel a matematikai felfedezés útján.
- Az öncélú formalizmus kerülendő, a formális nyelv használatát mindig megfelelően megalapozva kell bevezetni.
- A matematikaoktatás feladata elsősorban nem kész receptek átadása kritikátlan felhasználók számára, hanem a matematikai alkotás folyamatába való beavatás, s ezáltal gondolkodóvá nevelés.
- A matematikai alkotás folyamata szoros összefüggésben áll a játékkal, a kreativitással, s a játékosságban a matematika művészi arca mutatkozik meg.

A matematika mint egységes tudomány tanítására való törekvés a francia és a magyar reformtanterven is érezhető, ám nem egészen ugyanazt jelenti a két országban. Az 1969/70-es francia tanterv lineárisan épül fel, általános iskola 1. osztályában halmazelmélettel kezdődik a matematika tanítása, erre épül a számfogalom kialakítása stb. Az általános iskolai és collège-beli (ez felel meg a magyar felső tagozatnak) tananyag gerincét a számfogalom precíz felépítése adja: a 8. osztályos tantervben már a valós számfogalom lényegében axiomatikus felépítése szerepel. A geometria eleinte marginális szerepet játszik, az általános iskola első öt évének tanterve némi manipulációs, fizikai tapasztalatszerzésre ad lehetőséget; a geometria „tényleges, matematikai” felépítése a collège utolsó két osztályában (8–9. osztály) kezdődik, vektoralgebrai alapon. A tanterv nagyjából követi a matematika Bourbaki-féle felépítését, szigorúan egymásra építi a matematika különböző területeit, és nagy hangsúlyt helyez a struktúrákban való gondolkodás és a modern, formális matematikai nyelv mielőbbi elsajátíttatására. A tanterv bizonyos formális és tartalmi túlkapásai a ’70-es évek korrekciói során enyhültek, de az alapelvek a következő reformok tanterveiben is jól tetten érhetők.

Varga Tamás tanterve egészen másképp épül fel. Öt nagy témakör fut végig a 8 éves tanterven (halmazelmélet-logika, számtan-algebra, geometria-mérések, függvények-relációk-sorozatok, kombinatorika-valószínűségszámítás). Ezek a témakörök párhuzamosan vannak jelen, nem hierarchikus, hanem dialektikus viszonyban állnak egymással, gyakori összefonódásukkal kölcsönösen építik egymást. A tananyagban szereplő

[1] Erről bővebben ld. Gosztonyi, 2013

feladatok, problémák gyakran egyszerre több témakörhöz is kapcsolódnak, így biztosítva lehetőséget az elveknek megfelelő bőséges, változatos tapasztalatszerzésre. A tanterv a formális eszközök bevezetésével kifejezetten óvatos: arra helyezi a hangsúlyt, hogy a gyerekek saját nyelvi eszközeikkel, jelöléseikkel fejezzék ki magukat, és fokozatosan vezeti be az egységes, hivatalos jelöléseket.

Az általános iskolai matematikatanítás reformjában mindkét országban nagy szerepet kap a tevékenykedtetés, az eszközökkel való játék, manipuláció. Tanulságos azonban egy korabeli első osztályos francia tanítói kézikönyvből vett idézet[2]:

> *„A tanár szükségképpen zavarban van, hiszen a tanítás folyamatát úgy kell kialakítania, hogy egyszerre legyen tekintettel a matematika és a gyermekek természetére. De míg a matematika természeténél fogva absztrakt és deduktív, a pszichológusok arra mutatnak rá, hogy a gyermek rendszerező gondolkodás híján képtelen a logikus érvelésre, világképe alapvetően szubjektív .*
> *Mit kezdhetünk ezzel a problémával?*
> *[...]*
> *A tanár a valóság mindenféle formáiból kiindulva érteti meg a gyerekekkel a felnőtt gondolkodás által korábban kidolgozott matematikai törvényeket vagy fogalmakat. Olyan „szituációkat" kell tehát találnia, amelyekből kiindulva elvégezhető a matematizálás folyamata. Ennek a folyamatnak alább vázlatos leírását adjuk."*

A tankönyvszerző Eiller úgy látja, hogy a „matematika és a gyermek természete" alapvető ellentmondásban állnak egymással, a pedagógia feladata pedig ezt az ellentmondást feloldani. Mint láttuk, a Varga Tamás matematikafelfogását jelentősen befolyásoló magyar matematikusok erről másképp gondolkodnak. Szerintük a matematika nem eredendően absztrakt, hanem tapasztalatokból, szemléletből fejlődik ki, és válik különböző okok miatt, egy hosszú folyamat során egyre absztraktabbá (és ez nem csak a matematikai fogalmakra igaz, hanem a matematika nyelvére, bizonyítási módszereire is).[3]

Eiller a tanári kézikönyvében részletesen kidolgozott „leckéket" javasol a tanároknak. Minden lecke egy adott tananyag feldolgozására szolgál; manipulációs, felfedeztető szakasszal kezdődik, ezt követi egy szóbeli szakasz, a feladat megbeszélése, a válasz megfogalmazása: „általában ebben a fázisban vezetjük be az új kifejezéseket, amelyeket a lehető legkorrektebben igyekezzünk használni". A megbeszélést a megoldás ábrázolása követi sémákon vagy diagramokon, amelyek „a fogalmak megjegyzését segítik elő"; majd a lecke az elsajátított ismeretek ellenőrzésével zárul.[4]

A Varga Tamás-reform tantervéhez tartozó alsó tagozatos tanári kézikönyv[5] egészen másképp építkezik. Az öt párhuzamos tantervi fejezet elvének megfelelően a foglalkozások nem egy-egy „leckének" felelnek meg, hanem több, akár teljesen különböző témához kapcsolódó rövid feladatból, játékból állnak. A tanterv nem sietteti a „hivatalos" fogalmak vagy jelölések bevezetését, az új ismeretek tananyagszerű megfogalmazását, épp ellenkezőleg: arra biztatja a tanárokat, hogy minél tovább hagyják a

---

[2] Eiller, 1970, 30. o. (saját fordításom)
[3] Ld. elsősorban Kalmár, 1942.
[4] Eiller, 1970 31. o. saját fordításom
[5] C. Neményi et al. 1978.

gyerekeket a saját nyelvükön, a saját eszközeikkel kifejezni magukat, és sokszínű, gazdag tapasztalatszerzés útján maguk érlelhessék ismereteiket (az osztály különböző tagjai akár különböző tempóban is). A feladatleírások számos apró tanáccsal szolgálnak a tanároknak, hogyan segíthetik a gyerekeket a felfedezés folyamatában kérdésekkel, a játékszabályok módosításával stb. anélkül, hogy kész megoldást átadva elvegyék a gyerekektől a felfedezés lehetőségét. A Varga-reform nyugodtan lehet ilyen „ráérős”, hiszen felfogása szerint a gyerekek a tapasztalatszerzés során is – legyen szó tárgyakkal végzett játékról vagy akár gondolatkísérletekről – valódi matematikai tevékenységet végeznek a maguk szintjén.

A francia felfogásban a tanár egy intézmény képviselője, és mint ilyen, elsősorban azért felelős, hogy a diákok elsajátítsák az intézmény által előírt tananyagot. Ez a felfogás megjelenik a jelentősebb francia matematikadidaktikai elméletekben is. A konstruktivista tanuláselmélet meghatározó szerepet játszik Brousseau '70-es évektől kidolgozott matematikadidaktikai elméletében éppúgy, mint a korabeli matematikaoktatási reformokhoz kapcsolódó tananyagokban – de mint pedagógiai eszköz, amely a kitűzött célt, az adott matematikai tananyag elsajátítását szolgálja.

A Varga-reform inkább a gondolkodás folyamatára, a matematika közös újraépítésére helyezi a hangsúlyt, nagy teret biztosít az egyéni különbségeknek, de nagy önállóságot is vár el tanártól és diáktól egyaránt. A komplex reform elsős tanári kézikönyve tematikus elrendezésben és sokkal kevésbé részletesen ad feladatleírásokat, mint az Eiller-könyv – sok döntést, választást a tanárokra bíz, hogy egyéni ízlésüknek, a gyerekek adottságainak és az egyéb körülményeknek megfelelően állítsák össze a tananyagukat. Ugyan ad részletes, hetekre illetve órákra lebontott tanmenetet, de ez hangsúlyozottan csak egyfajta lehetséges tanmenet, és a tematikus fejezetek végigolvasása, feldolgozása nélkül önmagában nem is értelmezhető.

A komplex matematikaoktatási reform egyúttal a gyerekeket is autonómiára igyekszik nevelni. Nem csak arról van szó, hogy a tanár segítsége nélkül találják meg a megoldásokat: első osztálytól kezdve számos olyan feladat került bele a tananyagba, amelynek több lehetséges megoldása van, vagy nincs megoldása, esetleg a feladat leírásában van valamilyen hiba, amit észre kell venni. A Varga-féle reform ezekkel az eszközökkel tudatosan törekszik a tanár és a tananyag megkérdőjelezhetetlen tekintélyének a lebontására, és helyette az együttgondolkodás örömén alapuló partneri viszony felépítésére, ahol a tanár inkább segítője a diákoknak, mint a hivatalos tudás letéteményese.

Irodalomjegyzék

Brousseau, Guy (1998): *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Yves (1991): *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

C. Neményi Eszter – Göndöcs László – Merő László – Merő Lászlóné – Varga Tamás (1978): *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához*. Budapest, Tankönyvkiadó.

d'Enfert R. – Kahn P. (2011): *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République (années 1960)*, Grenoble: Presses universitaires de Grenoble.

Gosztonyi Katalin (2013): Matematikafelfogás és matematikaoktatás összefüggései a magyar matematikaoktatási hagyományban. In. Zvolenszky et al. (szerk.) *Nehogy érvgyűlölők legyünk: Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára* L'Harmattan, Budapest. 152163. o.

Halmos Mária – Varga Tamás (1978): Change in mathematics education since the late 1950's – ideas and realisation Hungary. *Educational Studies in Mathematics* 9: 2, 225–244.

Horaires, programmes, instructions : Mathématiques (classes du Premier Cycle) (1972)

Eiller R. – Mertz J. – Guyonnaud M. T. (1972): *Math et calcul cours préparatoire. Document de travail pour le maître,* Paris, Hachette.

Kalmár László (1942/1986): A matematikai egzaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig. In Kalmár 1986. 37–61.

Klein Sándor (1980): *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*. Budapest, Akadémiai Kiadó

Programme et enseignement des mathématiques à l'école élémentaire (1970) http://www.formapex.com/repertoires/550-programmes-textes-officiels

Schubring, Gert (2006): Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics: the State of the Art. *Paedagogica Historica*, 42: 4, 665–677.

Szebenyi Péter szerk. (1978): *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve*. Budapest, OPI.

A RÉGI ÉS AZ ÚJ TALÁLKOZÁSA AZ OKTATÁSBAN

Dancs Gábor

ELTE TÓK

Minden, ami létezett a világon, amikor megszülettünk,
az normális és hétköznapi és
a világ működésének természetes része.
Minden, amit tizenöt és harmincöt éves korunk között találnak fel,
az új és izgalmas, és forradalmi,
és talán karriert lehet csinálni belőle.
Minden, amit harmincöt éves korunk után fedeznek fel,
az a dolgok természetes rendje ellen való.
(Douglas Adams)

Ha az iskola neki rendelt szerepét továbbra is be kívánja tölteni az egyre gyorsabb ütemben változó világban, nem csak az oktatás anyagának, hanem a technológiájának is változnia kell. Bármilyen érzéseink is legyenek ezzel kapcsolatban, de míg nemrég a számológép is hatalmas vívmánynak számított, ma már sok gyerek olyan számítógépet hord a zsebében, aminek számítási teljesítménye sokszorosan haladja meg a néhány évvel ezelőtt még modernnek számító asztali gépekét is. Ennek gátat vetni nem tudunk – nem is kell – a kérdés csak az, észrevesszük-e, képesek vagyunk-e használni azokat a lehetőségeket, amiket ez a helyzet az oktatás szempontjából nyújt.

Társadalmi és technológiai környezetünk szinte a felismerhetetlenségig megváltozott az utóbbi évtizedekben. A XXI. században már nem csak a változások tényével, hanem a fejlődés sebességének folyamatos gyorsulásával is számolnunk kell. Az egyes embereket, a társadalmi szervezeteket és intézményeket, a gazdasági szereplőket mindez, eddig nem tapasztalt kihívások elé állítja.

A globalizáció, a telekommunikációs és informatikai eszközök, a világháló használatának hétköznapivá válása, a szinte kimeríthetetlen mennyiségű információhoz való azonnali hozzáférés lehetősége keletkezzenek azok bármilyen földrajzi távolságban egyrészt kitágította világunkat, másfelől egyre jelentéktelenebbé teszi a távolság- és időbeli korlátokat. A kommunikáció és a közlekedés fejlődése, a világméretű migráció kiterjedése révén az eddig (részben vagy egészben) elszigetelt kultúrák keveredése történik, annak minden előnyével és hátrányával együtt. A változások sebessége megsokszorozódott, az innovációk, tudományos vívmányok elterjedése, az új technológiák és technikai eszközök penetrációja szinte az ember számára követhetetlen tempóban zajlik. Az egyén szempontjából ez az állandó változás, bizonytalanság, információdömping sajátos adaptációs stratégiákat igényel, mint a folyamatos „bekapcsoltság", „összekapcsoltság", rugalmasság, a változásra való képesség, hálózatos gondolkodásmód,

folyamatos túlteljesítés, megújulás. Ilyen körülmények között az egyén önmagában életképtelen, a szociális kompetenciák megléte, a csoportban történő munkavégzés, a folyamatos önképzés, az élethosszig tartó tanulás nem választási lehetőség, hanem társadalmi kényszer.

A gazdaság jellegének megváltozásával (a szolgáltatói jellegű társadalom vagy posztindusztriális társadalom kialakulása, majd a quaterner szektor jelentőségének növekedése) a munkaerőpiacon komoly igény támad a magasan és sokoldalúan képzett munkavállalók iránt. Egyes közgazdászok, mint (a sokat támadott) Richard Florida szerint az úgynevezett „*creative class*" aránya határozza meg a gazdasági versenyképességet és sikerességet, és egyben a leggyorsabban növekvő társadalmi réteggé válik. Az Európai Közösségek Bizottsága által kiadott dokumentum szerint az EU-ban 2010-ben újonnan létrejövő állások 50%-a magasan képzett munkaerőt igényel, és mindössze 15%-ot tölthetnek be alapfokú végzettséggel rendelkezők, miközben az európai munkaerő közel harmada alacsonyan képzett.

A tudás-alapúvá váló társadalomban így egyre nagyobb nyomás nehezedik az oktatásra, mivel a jövő „kreatív munkaerejének" tömeges képzéséért (legalábbis részben) felelős. Számolni kell az oktatás szerepének megváltozásával: az iskola a tudás fellegvárából, illetve a tudás egyedüli letéteményeséből szolgáltatássá, a társadalom és a gazdaság aktuális igényeinek kielégítőjévé válik. Ilyen szerepében pedig meg kell felelnie a több oldalról is ránehezedő elvárásoknak. Az elvárásoknak a család, illetve magának a diáknak a részéről, másfelől a gazdasági szereplők részéről (amelyek a csúcstechnológiai kutatások és alapkutatások költségeinek exponenciális növekedése révén ezeken a területeken a hagyományosan egyetemi kutatások konkurenciái és társfinanszírozói is). Egyensúlyt kell találnia a kulturális hagyomány, és a tudomány (abszolút értelemben vett) értékeinek közvetítése, illetve a tudásra, mint kizárólagosan hasznosítható, alkalmazható, profittermelő termékre tekintő szemléletek között. A hagyományos oktatási rendszereket számos kritika éri, miszerint is ez utóbbi feladatának képtelen eleget tenni, illetve nem felel meg azoknak a megváltozott körülményeknek, amikben működni kénytelen. Ezen kívül nem tud megfelelni az integrációs elvárásoknak, mely szerint egyetlen rendszernek, intézménynek kell oktatnia a különböző szociális hátterű, kulturális hátterű, nevelési igényű diákokat („egy iskola mindenki számára"). A differenciálási elvárásoknak, melyek szerint egyszerre kell tanítani a különböző előzetes ismeretekkel rendelkező, különböző képességű és eltérő érdeklődési területű diákokat, ráadásul úgy hogy az alap és középfokú oktatásban a lemorzsolódás minimális legyen („*no child left behind*"). A globális tudás és ismeretanyag növekedésével és hozzáférhetővé, elérhetővé válásával pedig lehetetlenné válik a tudás(anyag) átadása, hiszen ezt a tudást tulajdonképpen senki sem birtokolja, ezért az ismeretek közlése helyett az ismeretek megszerzésének módjára kell áthelyeznie a hangsúlyt.

Mindezek mellett számolni kell az oktatás tömegessé válásával. Részben a gazdaságban növekvő tudásigény hatására a fiatalok egyre szélesebb rétege, egyre több időt tölt az oktatásban. A mind nagyobb arányú iskoláztatás többek között azzal az egyszerű statisztikai következménnyel jár, hogy az átlagos teljesítmény csökkenése mellett a szórása viszont növekszik. Ezzel a tényezővel viszont a hagyományos oktatási rendszer nagyon nehezen (vagy egyáltalán nem) birkózik meg.

II.

Ezek a folyamatok az oktatás több területén is mélyreható változásokat okoznak, legyen szó akár az oktatás céljáról, az oktatás tartalmáról, az oktatás alanyairól, az oktatás módszereiről, a számonkérés és ellenőrzés módjáról, időbeosztásáról, vagy akár épületéről. Mindezek között az egyik leglátványosabb változás a tanteremben jelen lévő technológia mennyiségének robbanásszerű növekedése, beleértve az intézmény által biztosított eszközöket és a tanulók saját eszközeit is. Az nem kérdés, hogy ez a tendencia egyenes következménye a világ digitalizálódásának, a kérdés csak az, hogy az iskola képes-e kihasználni az ebből adódó lehetőségeket, képes-e helyesen használni ezeket az eszközöket?

Az iskolai tantermek berendezése és elrendezése a középkortól egészen az utóbbi néhány évtizedig szinte változatlan volt. Ma a fejlett világ tantermei gyorsabban változnak, mint bármikor az oktatás történetében. A krétás, filces táblákat, füzeteket, tankönyveket, faliképeket, demonstrációs táblákat, írás- és diavetítőket, egyre gyorsabb ütemben váltják le a digitális táblák, laptopok, tabletek, számítógépként használható telefonok és nagyfelbontású projektorok.

A korszerű tantermeket („okosterem") technikai felszereltségük szintje, illetve a tanteremben jelen lévő eszközök használatának módja szerint a következő kategóriákba csoportosíthatjuk:

1. *Személyi számítógép és projektor*: ezek a berendezési eszközök a számítógépek és projektorok árának drasztikus csökkenésével egyre gyakoribbak az osztálytermekben. Leggyakrabban prezentációs célokat szolgálnak, de a megjelenő információ általában statikus abból a szempontból, hogy előre el- vagy előkészített, a tanóra alakulásától függően nehezen változtatható. Ez a berendezési forma továbbra is elsősorban a frontális információátadást segíti. Kétségbevonhatatlan előnye, hogy számtalan korábban használatos oktatástechnikai eszköz használatát pótolja, például írásvetítő, diavetítő, TV és videó, vagy DVD lejátszó, bizonyos esetekben epidiaszkóp stb.
2. *Interaktív tábla*: a technológia finomodásával képes lehet arra, hogy a hagyományos táblák alternatívája legyen (jelenleg viszonylagos pontatlansága, és kényelmetlen használata miatt erre nem alkalmas), de legfőbb jelentősége nem ebben van. Mint speciális beviteli eszköz alkalmas arra, hogy a kivetített információba megjegyzéseket szúrjunk, lényeges elemeket kiemeljünk, a statikus információkat a magyarázat során megváltoztassunk, dinamikus demonstrációkat vihessünk az órára. Amennyiben a felszereltség ezt lehetővé teszi, az ezekkel a kiemelésekkel és megjegyzésekkel módosított tananyagot a diákok (akár valós időben) megkaphatják, elmenthetik saját számítógépeiken.
3. *Érintésalapú beviteli eszközök* nem csak a tanár, hanem a diák használatában is: a megfelelő szoftveres megoldások birtokában nem csak a tanár egészítheti ki, módosíthatja a kivetített tartalmakat, hanem a diákok a saját számítógépeiken, táblagépeiken megtehetik ugyanezt. Az egyes diákok munkái összegyűjthetők, vagy további elemzés céljából kivetíthetők, módosíthatók. Ez a tanár-diák és diák-diák interakció egy teljesen új szintjét jelenti.

4. Mindezek mellett a tantermek *további eszközökkel* való felszerelése is lehetséges. A teljesség igénye nélkül ilyenek lehetnek a különböző audio-video eszközök, SRS eszközök (feleltetőrendszerek) stb. A leggazdagabban felszerelt tantermek egyszerre tölthetik be a stúdió, a konferenciaközpont, az előadóterem és munkaállomás szerepét is.

A tantermek ilyen módon történő felszerelése a változások indikátora, de előidézője is egyben a tanítási folyamat hangsúlyváltozásának. A hagyományos oktatási rendszerben a tanóra az információátadás színhelye, a szintézis és a problémamegoldás túlnyomórészt az iskolán kívül történik. A korszerű tanítási eszközök használata viszont lehetővé teszi a tanulás helyszínének mobilizálódását, a hagyományos tanórák szerepének megváltozását, eltolódását az információ átadásáról az információ feldolgozására, rendszerezésére. Ilyen környezetben a tanár szerepe is megváltozik, sőt felértékelődik, hiszen a tanár az, aki a megfelelő tanulási környezetet létrehozza és fenntartja.

A tanulási környezet modernizálódása a hatékonyság illúzióját kelti. Nem szabad azonban elfelejteni, hogy a tanárok idegenül mozognak a megváltozott körülmények között, az esetek többségében nincsenek felkészülve arra, hogy az eszközöket megfelelő módon alkalmazzák a pedagógiai célok megvalósítására. A hagyományos módszerek ugyanis ilyen környezetben alkalmazhatatlanok, a mód, ahogyan a tanár tanult és tanít talán menthetetlenül elavult. Az új tanítási technikák azonban kiforratlanok, számtalan a kétség és a vita velük kapcsolatban, a hatékonyságukra nézve nincsenek megnyugtató kutatási adatok, arról nem is beszélve, hogy a tanárok nincsenek felkészítve az ilyen módon történő tanításra. A helyzetet tovább bonyolítja, hogy bár a diákok nagy jártassággal rendelkezhetnek a korszerű eszközök használatában, de az ezekkel történő információszerzés területén számtalan hiányossággal rendelkeznek. Magabiztosságuk egyáltalán nem jelenti azt, hogy a kezükben lévő eszközt valójában használni is tudják. A tanulók nem tudnak megbirkózni a rájuk zúduló információáradattal, nem tudják hatékonyan rendszerezni, meggyőződni hitelességükről, kiemelni lényegüket, megítélni validitásukat.

III.

Egy valami azonban biztos: pusztán az iskolák felszerelése akár a legkorszerűbb berendezésekkel nincs hatással a tanulás folyamatára és eredményességére. A tantermek és az iskola átalakulása bár rendkívül látványos folyamat, de nem hátrányok nélkül való. A következőkben a teljesség igénye nélkül áttekintjük az új technológiák tantermi használatának előnyeit és hátrányait.

Pozitívumok

A tanulás új módjai jelennek meg az osztályteremben. A multimédiás eszközök használata egyszerre több intelligenciaterület, képesség és készség használatát, kombinálását eredményezi. A telekommunikációs eszközök használata megkönnyíti a tapasztalatszerzést, és a tapasztalatokon keresztüli tanulást. Az új kommunikációs formák erősítik a csoportos tanulást, fejlesztik a szociális kompetenciákat, és a kommunikációs készségeket. Lehetőség van arra, hogy a tanulócsoportok sokkal nagyobb önállósággal működjenek, mivel a tanár nem az

információk egyedüli forrása. Lehetőség van továbbá a kommunikációs csatornák fenntartására a tanórán, sőt az iskolán kívül is.

Motiváció lehetősége. Az egyszerre több érzékszervre ható demonstrációs eszközök az érdeklődés felkeltésének, a figyelem fenntartásának, és ezáltal a motiválásnak is eszköze lehet. A tanulás folyamatában aktív résztvevőként szereplő tanuló feltételezhetően nagyobb felelősséget vállal saját tanulásáért, és olyan készségeket szerez, amelyek segítik tanulásában az iskolai éveken túl is.

Különböző tanulási stílusokhoz való alkalmazkodás lehetősége. A tanító szerepének megváltozásával egyre inkább háttérbe szorul az absztrakt, instrukciókon keresztüli ismeretátadás, és előtérbe kerül a csoportban tanulás, az ismeretek diákok közötti megosztása-átadása, amely lehetővé teszi, hogy a tanuló a saját stílusában, a saját tempójában sajátítsa el az ismereteket.

Az információk azonnal hozzáférhetőek. Megfelelő vezeték nélküli internetkapcsolat rendelkezésre állása esetén a tanórán felmerülő bármilyen információ azonnal kereshető, hivatkozható, pontosítható, definiálható, ahhoz ábra, illusztráció kereshető. Az információ keresése a helyszínen is megtörténhet, nem kell fizikailag és időben elválnia a tanórától.

A demonstráció módjainak kibővülése. Könnyen megjeleníthetővé és rendszerezhetővé válnak a nagymennyiségű adathalmazok, az ezek közötti összefüggések. Egyszerűen, és ugyanazon eszközön jeleníthetők meg a legkülönbözőbb demonstrációs anyagok: képek, videók, hangok stb. A kiegészítő információk nem korlátozódnak a verbális területre.

Az órai munkák egyszerű mentésének és megosztásának lehetősége. Amennyiben a tananyag és a diákok órai munkái a megfelelő formátumban állnak rendelkezésre, akkor ezek szerkeszthetők, kiegészíthetők, javíthatók, megoszthatók, összegezhetők. A diáknak lehetősége van a tanári szemléltetőanyagokat megjegyzésekkel, jegyzetekkel ellátni.

Az azonnali és anonim visszajelzés lehetősége SRS-rendszereken keresztül.

Az akár teljesen papírmentes oktatás megteremtésének lehetősége.

Negatívumok

A figyelem elterelése. Az elektronikus eszközök és az internet tantermi rendelkezésre állásával jelentősen megnőtt a diákok figyelmét elterelő tényezők száma az osztályteremben. Az egyébként is egyre rövidebb ideig koncentrálóképes diákok az óra unalmasabb perceiben hajlamosak egyéb ügyeiket intézni a számítógépeken, amely tevékenységük igen nehezen ellenőrizhető vagy észrevehető. A tanulók figyelmének megoszlása a tanóra és egyéb tevékenységeik közt a tanóra hatékonyságának csökkenését eredményezi. A mobiltelefonok, táblagépek és laptopok tanórai használata fegyelmezési gondokat is okoz.

A csalás, puskázás lehetősége. Az internet elterjedésével egyre könnyebb az információkhoz hozzájutni. A plagizálás lehetősége, a diákok munkáinak egymás

közötti megosztása sokkal könnyebb, mint a kézzel írt feladatok esetében. A tanórán használt számítógépek esetén még nehezebb a csalásokat kiszűrni. A vá laszok az interneten azonnal kereshetőek, a tanulók a számítógépeik asztalképét könnyedén megoszthatják egymással.

A kutatások módjának megváltozása. Tanulmányok sokasága bizonyítja, hogy a könnyedén hozzáférhető információk a kutatások forrásait egyre inkább az online formák felé terelik el. Míg az internet elterjedésével a kutatások anyagának összegyűjtése lényegesen könnyebbé vált, ezzel párhuzamosan a beadott munkák átlagos minősége folyamatosan romlik. Az egyetemi hallgatók jó része gondolja úgy, hogy a kutatáshoz elegendő kizárólag online forrásokat keresni. Ráadásul a tanulók hajlamosak az interneten talált információkat tényként elfogadni, megbízhatatlan forrásokból dolgozni. A tudás, a helyes ismeretek rendelkezésre állásának látszatával felértékelődik az információ helyessége felismerésének, megítélésének képessége. Kérdéses azonban, hogy a megfelelő előzetes ismeretek birtokában mindez hogyan lehetséges.

A technikai eszközökkel kapcsolatos problémák. Az oktatási intézmények általában nem képesek a megfelelő szintű támogatást biztosítani a tanároknak és a tanulóknak az eszközök használatával kapcsolatban. A felhasználók képzettsége nem mindig megfelelő a felmerülő problémák megoldására, ezek pedig megakaszthatják, vagy akár ellehetetleníthetik az ilyen módon tartott tanórákat. Az általában igen drágán megvásárolt eszközök üzemeltetési és karbantartási költsége is magas, ezért azoknak mind üzembentartása, mint javítása komoly nehézségeket okoz az alacsony költségvetéssel dolgozó oktatási intézményeknek. A szoftverek folyamatos frissítésének is igen magas költségvonzata lehet. Ha az intézmények ezeken a költségeken spórolnak, akkor megvásárolt felszerelésük elavul, vagy használhatatlanná válik. Egyre komolyabb gondot okoznak a kompatibilitási problémák. Az intézmények általában meghatározott hardver és szoftvercsomaggal dolgoznak, amelyek nem minden esetben működtethetők együtt a diákok által használt eszközökkel. Ezekről lemondani azonban még nagyobb költségekkel jár és a rendszert is rugalmatlanná teheti.

Költségek. Egy egész iskola felszerelése modern eszközökkel igen komoly beruházást igényel. Az első beszerzésen kívül számolni kell még az előző pontban taglalt kiadásokkal, a működtető és karbantartó személyzet bérköltségével, a tanárok továbbképzésének költségével is.

Az időtényező. Bár általában úgy gondoljuk, hogy az internet meggyorsítja a munkafolyamatokat, bizonyos esetekben azonban nagymértékű időkieséssel kell számolnunk. A megfelelő honlapok megkeresése, a megfelelő programok keresése vagy telepítése, a releváns információk kiszűrése az információdömpingből, a csatlakozási problémák, a technikai problémák megoldása, a dokumentumok megfelelő rendszerezése és tárolása vagy konvertálása mind a rendelkezésre álló idő terhére kell megtörténjen.

A technológia nem megfelelő használata. Számtalan esetben a hagyományos eszközök használata célravezetőbb egy probléma vagy feladat megoldásában. A korszerű felszerelések megléte azonban arra sarkallja mind a tanárt, mind a tanulót, hogy ezeket az eszközöket használják abban az esetben is, ha ez nehézkes vagy éppen kifejezetten hátrányos.

Módszertani problémák. Ezeknek az eszközöknek a tanítás folyamatába történő beépítése, a felhasználásuk módjai értelemszerűen nincsenek még alaposan kidolgozva, hiszen az eszközök maguk is viszonylag újak és folyamatosan megújulnak. Azt, hogy mikor, kiknek, milyen módon, milyen arányban, milyen pedagógiai célok érdekében milyen eszközt használjunk, jelenleg jórészt a tanár ítélőképességére és ötletességére van bízva. Mindemellett a korszerű eszközöket használó oktatási segédanyagok is további finomítást, bővítést, javítást igényelnek.

A tanulás hangsúlya az eszközzel történő tanulásról az eszközről történő tanulássá helyeződhet át.

Esetenként aránytalanul több felkészülési időt igényel a tanár részéről, ráadásul, amennyiben valóban korszerű és naprakész kíván maradni az eszközök felhasználásában folyamatos képzésre van szüksége.

Lehetséges egészségügyi problémák. A kutatások a mai napig nem tisztázták megnyugtatóan az elektronikai eszközök folyamatos használatának élettani hatásait.

Vajon az előnyök ellensúlyozzák a hátrányokat? Erről a kérdésről valójában igen keveset tudunk, de tulajdonképpen akármerre billenjen is a mérleg, az oktatás módjának ilyen irányba történő fejlődését, változását úgy tűnik már nem lehet, de nem is célszerű megállítani. Bármi legyen a szerepe ugyanis az iskolának a jövő társadalmában a tanulók szokásaival és életmódjával szembe nem helyezkedhet.

Egy USA-beli kutatás szerint a diákok életének jelentős szereplője a modern technológia, átlagosan három számítástechnikai eszközt használnak naponta. Kétharmaduk legfeljebb egy órán keresztül képes valamilyen digitális eszköz használata nélkül meglenni, 40%-uk kevesebb, mint 10 percet. Mindösszesen 5% szerint elengedhetetlen a nyomtatott könyvek használata a tanulásban, több mint 50%-uk szerint a tanulásuk legfontosabb kelléke a laptop. Ilyen körülmények között az iskola tartósan nem tilthatja ezeknek az eszközöknek a használatát, hanem mindenféle alkalmat meg kell ragadnia arra, hogy a tanításban felhasználja, a tanítás folyamatába integrálja a korszerű eszközöket.

Mindezt annak ellenére, hogy a kutatások nem támasztják alá egyértelműen a technológia tantermi beszerelésének pozitív hatásait. Egy szintén az Egyesült Államokban készült meta-kutatás 74 hatékonysági tanulmány összesítése után azt találta, hogy a korszerű technikák alkalmazása csak elenyésző mértékben tudta emelni az oktatás eredményességét, illetve nem tudta elválasztani ebben a csekély növekedésben sem az eszközök hatását az eszközök révén bekövetkezett módszertani változások hatásaitól.

Az eredmények elmaradásáért valószínűleg több tényező is felelőssé tehető. Az új technológiák integrálását a legtöbb esetben nem előzi meg semmilyen hatékonysági,

vagy alkalmazhatósági kutatás, így azok sok esetben kihasználatlanul maradnak, vagy nem célszerűen, vagy nem rendeltetésüknek megfelelően lesznek alkalmazva. Ezen felül a tanárok nincsenek megfelelően felkészítve az eszközök használatára, sem pusztán az eszköz, sem pedig a didaktika szemszögéből. Az elsietett beruházások miatt ezek az eszközök gyakran jóval korábban kerülnek használatba, minthogy az azt használó emberek megfelelően fel lennének készítve alkalmazásukra.

Különösen nagy gondot okoz, hogy miközben az osztálytermek felszerelése igen gyors mértékben fejlődik, eközben a tanítás módszerei, a számonkérés módszerei, a tanítás tartalma, a tanterv lényegesen lassabban, vagy egyáltalán nem követi a fejlődés indikálta változásokat, emiatt súlyos ellentmondások keletkeznek a lehetőségek, a kívánatos oktatási formák és a gyakorlat között.

Az eszközök tartalommal való támogatása tanítási segédanyagok vagy szoftverek tekintetében szintén nem megfelelő. Sok ilyen anyag szinte semmiféle előnyt nem jelent a hagyományos oktatási segédeszközökkel szemben, nem, vagy csak kevéssé használja ki a korszerű eszközökben rejlő lehetőségeket. Csak néhány példa: az elektronikus tankönyvek jó része ugyanazt a leckénként történő lineáris felépítést követi, mint bármilyen tankönyv az elmúlt évszázadokban, teljesen figyelmen kívül hagyja a felnövekvő generáció nem-lineáris tanulási szokásait, a hivatkozásokban, dinamikus tartalmakban rejlő lehetőségeket. Az oktató- és gyakorlóprogramok jelentős része nem ad megfelelő visszajelzéseket a hibás válaszok esetén (pl. miért hibás, hogyan kellene helyesen megoldani stb.), ezért ezek a tanulók számára egyszerű próba-szerencse alapon működnek, illetve céljukkal ellentétben a hibás stratégiák begyakorlását is segítik.

Nem találhatunk megnyugtató összefüggést a tanulók modern eszközök általi motivációja, és a tanulási eredményeik között sem. Nem tiszta továbbá, hogy ezek az eszközök mennyire szolgálják a tanulási folyamatot, és mennyire jelentenek zavaró tényezőt a tanulók figyelme szempontjából.

Arra sincsen megnyugtató válasz, hogy ha a technológiára költött az oktatási rendszer tekintetében csillagászati összegeket más módon fektetnék be a rendszerbe, nem lehetne-e jobb eredményeket elérni?

IV.

A különböző számításokat segítő eszközök tulajdonképpen mindig jelen voltak a matematika tanításában. Már az abakusztól kezdve nyilvánvaló az a törekvés, hogy a matematikai számítások sebességét és pontosságát növelni lehessen és kiküszöbölni az ezzel járó kognitív terhelést, és szinte ugyanekkortól tanúi lehetünk annak is, hogy ezeknek az eszközöknek a matematika oktatásába való beépítése folyamatos vitákat gerjeszt. Ezeknek a kiindulópontja az, hogy nincs megegyezés abban, hogy a matematikai képességek közül a matematikatanításnak pontosan mire is kéne fókuszálnia. Szinte még el sem csitult az a vita, amelyik a digitális számológépek tantermi használatával kapcsolatban dúlt az 1970-es évektől, a technika fejlődése révén máris a számítógépek matematikaórai használatával kapcsolatban kezdődött el a vélemények ütközése. Az ezzel kapcsolatos konceptuális viták még nagyobb területet érintenek, mint a zsebszámológépek problémája, ugyanis a számítógépek nem egyszerűen csak helyettesítenek bizonyos

matematikai kompetenciákat, hanem feje tetejére állítják akár a tananyagok tanításának sorrendjét, vagy az ezekkel kapcsolatos módszereket.

Ahogyan minden más területén az oktatásnak, a matematikaoktatásban is számos buktatója és zsákutcája van a korszerű eszközök bevezetésének. Ezek elkerüléséhez a következő szempontok figyelembevételét javasolhatjuk.

A technikai eszköz használata a tanítás megfelelő pontján történjen. Teljesen nyilvánvalóan figyelembe kell vennünk az adott tananyagrész pedagógiai célját, és a használt eszközöket ennek megfelelően kell kiválasztanunk. Az egyszerű számolások és műveletek elsajátítását nem előzheti meg a számológép használata. Amennyiben adatok ábrázolási módjait tanítjuk, azt nem előzheti meg egy diagramkészítő program bevezetése. Ha a szerkesztési eszközök használatát tanítjuk, ezt nem előzheti meg valamilyen geometriai ábrázolóprogram használata. Mivel a tanulási folyamatban igen fontos szerepe van az éppen megtanulandó ismeret vagy készség hasznosságának, ezért ezt nem tehetjük feleslegessé vagy haszontalanná, mielőtt azt megtanítanánk, mert ez a későbbiekben lehetetlenné tenné az adott ismeret beépülését.

A számítástechnikai eszköz használatának bevezetése matematikai kontextusban történjen. Gyakori az a hiba, hogy egy rendelkezésre álló eszköz használatának bemutatása megtanulása után kíséreljük meg azt valamilyen matematikai probléma reprezentálására vagy megoldására használni. Ilyen esetben a matematikai tartalom másodlagossá válik az eszköz használatával szemben, és mintegy mellékesen jelenik csak meg a tanítás folyamatában. Ezen a módon nem a matematikai probléma valamilyen eszközzel történő megoldását tanítjuk, hanem pusztán az eszköz használatát mellékes matematikai tartalommal.

Valódi matematikai tartalmat jelenítsünk meg, és ahhoz válasszuk a megfelelő eszközt és pedagógiai módszert. Bármilyen számítástechnikai vagy egyéb eszközt használjuk a tanításban, elsődlegesen pedagógiai szempontokból kell mérlegelnünk az eszköz használatát, és nem az eszköz lehetőségeiből kiindulva kell megválasztanunk a tartalmat. Az eszköz lehetőségei nem írhatják felül a tanítási célokat.

A szimulációs programok használata azt a veszélyt is magában hordozza, hogy a tanulók igénye a precizitásra és a bizonyításokra csökken. A „tévedhetetlen" számítógép által adott információkat a tanulók hajlamosak egyszerű empirikus bizonyítékként elfogadni.

Használjuk ki a technológia nyújtotta lehetőségeket. A korszerű eszközök használata leginkább akkor indokolt, ha azt olyan tartalmak megjelenítésére használjuk, amelyek hagyományos módszerekkel nehézkesek, vagy lehetetlenek lennének. A számítógépek révén képesek vagyunk olyan matematikai területeket is érinteni, amelyeket korábban nem, vagy nem abban az életkorban tudtunk tanítani. Tipikus példák lehetnek erre a különböző diagramok, statisztikai összefüggések, regressziók, eloszlások, végtelen összegek, topologikus összefüggések, fraktálok. Általában elmondhatjuk, hogy digitális eszközöket a hagyományos módon is megvalósítható módon használni, vagy pontosan ugyanazon a módon használni, mintha az eszköz nélkül dolgoznánk, nemhogy nem hatékony, hanem kifejezetten káros abból a szempontból, hogy megkérdőjelezi a technikai eszköz hasznosságát, vagy alkalmazásának indokolt voltát. Továbbá korszerű eszközt használni akkor, amikor az adott feladat hagyományos módokon könnyebben

vagy gyorsabban elvégezhető lenne, értelmetlen, és a hatékonyt tanítást akadályozza. Pontosan az ilyen esetek támasztják alá azokat a véleményeket, amelyek szerint az új eszközök használata teljesen felesleges.

A számítástechnikai eszközök révén lehetővé válik a különböző matematikai területek kapcsolatának, illetve a matematikai tartalom és a valóság kapcsolatának bemutatása. Tipikusan ilyen területek az algebra és geometria kapcsolata, az egyenletek és egyenlőtlenségek grafikus megoldása, a különböző transzformációk reprezentációja, a paraméterek hatása a függvényekre, a statisztika és a valószínűségszámítás összefüggéseinek és törvényszerűségeinek bemutatása. A demonstráció lehetőségeinek kibővülésével sokkal több lehetőségünk van a tantárgy interdiszciplináris kapcsolatainak erősítésére is.

Többféle reprezentáció használata. A tanulóknak általában nehézséget okoz bizonyos matematikai fogalmak többféle reprezentációja közötti kapcsolat felismerése például függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek esetében. A megfelelő számítógépes programok használatával a különböző ilyen típusú összefüggések szemléltetése könnyen lehetővé válik.

Természetesen ezek a szempontok nem különülnek el szigorúan egymástól. Egy jól megválasztott feladat akár mindegyiknek eleget tehet. Amennyiben betartjuk ezeket az irányelveket, lehetőségünk lesz arra, hogy azonos idő alatt több matematikát, és fontosabb matematikai tartalmakat tanítsunk, mint a korszerű eszközök használata nélkül. A segédeszközök, amennyiben célszerűen alkalmazzunk őket, a hangsúlyok áthelyezhetők a rutinszerű számításokról a valódi matematikára. Figyelnünk kell azonban arra, hogy elkerüljük a korszerű eszközök használatának buktatóit.

Összességében elmondható, hogy a korszerű informatikai és kommunikációs eszközök tantermi megjelenése nem a bölcsek köve az oktatásban. Mint minden új módszer és technológia esetében annak kiforratlansága, az alkalmazással kapcsolatos tapasztalatok korlátozott mennyisége, a tanár, tanító tapasztalatlansága, illetve az újdonsághoz kapcsolódó „hype" okán, a média vagy akár tudományos ihletettségű tanulmányok nyomása ellenére kellő óvatossággal és önfegyelemmel kell eljárni az osztálytermi alkalmazás során. Mérlegelnünk kell a bevezetés valódi lehetőségeit anyagi, szervezési, technológiai és didaktikai szempontokból is, ami a tanárra újabb terhet ró.

Meggyőződésem, hogy a tanítási folyamatban az eszközök másodlagos szerepet töltenek be a tanár tantárgyi és pedagógiai felkészültsége, személyisége mellett. A technikai eszközök lehetőséget adnak arra, hogy használatukkal közelebb hozzuk a tananyagot a jelenkori tanulógenerációkhoz, szorosabb kapcsolatot teremtsünk a való világ és az elvont tudományterületek között, a szemléltetés és a műveltetés, tevékenytedtetés lehetőségeinek kibővülésével hatékonyabbá tehessük a tanítási folyamatot. De mindez nem pótolja a jó pedagógus-szakembert, legfeljebb arra teremt alkalmat, hogy a jó tanár még jobban tanítson, de nem akadályozza meg azt, hogy a rossz tanár még rosszabbul.

Irodalomjegyzék

Al-Bataiineh A., Brooks L. (2003): Challanges, advantages and disadvantages of instructional technology in the community college classroom (*Community College Journal of Research and Practice* 27, 2003.)

Center of Technology in Learning: Why should a teacher use technology in his or her mathematics classroom? (*SRI International*, 2007.12.)

Cheung A, Slavin R. E. (2013): The effectiveness of Educational Technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms (*Educational Research Review*, 9, 2013.)

Davis S. S. (2012): Technology in the Classroom: Assets and Liabilities (*Faculty Focus*, 2012.05.)

Dunn, J. (2011): The Evolution of Classroom Technology (*Eudemic*, 2011.04.)

Garofalo J., Harper S. (2000): Promoting appropriate uses of technology in mathematics teacher preparation (*Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 1, 2000.)

Goodwin, B. (2011): One-to-one laptop programs are no silver bullet (*Teaching Screenagers* 68/5, 2011.)

Johnson, M. (2005): Are classrooms really smarter? (*Running Head*, 2005.)

Lepi, K (2012): 11 Real Ways Technology is Affecting Education Right Now (*Eudemic*, 2012.08.)

Miller, R. K. (2013): Mobile Devices and Apps in Education (*SCR Connections Webinar*, 2013.)

Scmitz E, Prescott C., Hunt L. (1996): Learning technology (*CORD*, 1996.)

Stols, G. (2011): *Teaching and learning of Mathematics using technology* (University of Pretoria, 2011.05.)

Walsh, K. (2012): Pros and cons of digital devices in the hands of young students (*EmergingEdTech*, 2012.06.)

A DIDAKTIKA HELYZETE A NEVELÉSTUDOMÁNYON BELÜL

ADALÉKOK A TANÍTÓKÉPZÉS DIDAKTIKAKÉPÉHEZ

Lénárd András

ELTE TÓK

A didaktika, mint tudományterület helyzete az elmúlt néhány évvel ezelőttig megkérdőjelezhetetlen és megingathatatlan volt a magyar pedagógiában. Mostanra azonban egyre gyakrabban lángolnak fel viták szerepével kapcsolatban. 2006-ban például az MTA Neveléstudományi Szakbizottságának Didaktikai Albizottsága tűzte napirendjére annak megvitatását, hogy (Báthory Zoltán szavaival élve) „Létezik-e még didaktika?”[6] A tanulmány ezt a kérdéskört járja körül.

Természetesen nem egy évszázados tudományterület hirtelen és szándékos megszüntetéséről/megszűnéséről van szó, hanem arról, hogy a pedagógia, s mint később látni fogjuk, a pszichológia bizonyos ismeretkörei alkothatnak-e egyáltalán önálló rendszert, van-e egy ilyen önálló rendszernek létjogosultsága akkor, amikor a tanulással kapcsolatos kutatások egyre szélesebb körben, különböző megközelítésekkel és területeken folynak.

A pedagógiai szakirodalmakat áttekintve a különféle didaktikai megközelítések – didaktikák – szövevényével találkozhatunk. Nyilvánvaló, minden didaktikai megközelítés, irányzat vagy egyszerűen a didaktika megalkotói és hívei ugyanazon szándéktól vezéreltek:

> *„Mi mindannyian, akik didaktikát szeretünk írni, modern didaktikát szeretnénk írni. Mi mindannyian, akik didaktikával foglalkozunk (tanítunk, alkalmazunk) természetesen modern didaktikát szeretnénk tanítani, alkalmazni. Olyan didaktikára gondolok, mely tudományos hitelét megtartva elsősorban gyakorlati haszonnal szolgál olvasóinak, alkalmazóinak.”*[7]

Érdemes röviden áttekinteni, milyen szempontok alapján épülnek fel ezek az egymással sokszor bonyolult kapcsolatban lévő didaktikák, didaktikai megközelítések. Azt, hogy ezek a törekvések a neveléstörténet teljes keresztmetszetén Comeniustól Herbarton, Dewey-n, Nagy Lászlón, Nagy Sándoron keresztül egészen napjainkig húzódnak, sejtetik, hogy igen nehéz, még inkább lehetetlen megnyugtató – mindenki számára megnyugtató –, egységes rendszert felállítani. E probléma taglalása odáig foly-

---

[6] Báthory Zoltán: Létezik még didaktika? *Pedagógusképzés*, 2006/1–2. sz. 49.

[7] Uo.

tatódhat, hogy felmerül a didaktika, mint tudományterület önálló voltának megkérdőjelezése is. A didaktikát, mint önálló tudományterületet leginkább a más, határ- illetve rokon tudományterületekben való feloldódás önálló rendszerének szétesése, illetve elaprózódása fenyegeti. Báthory Zoltán tanulmányában[8] a következő okokat tárja fel, melyek a didaktika létválságát is magyarázzák:

- *Az egyes didaktikai kategóriák a tanulóra, mint személyre vonatkoznak, így azok egyszersmind pszichológiai kategóriák is.*
- *Nehéz meghúzni a határvonalat a didaktika és a neveléselmélet között is. Amennyiben ez a szétválasztásra vonatkozó törekvés túlzásokba esik a didaktika oldaláról, didakticizmusról beszélhetünk.*
- *Az oktatási cél fogalma egyszersmind filozófiai, antropológiai, míg a tanulási folyamat felépítése pszichológiai, szociológiai, a pedagógiai interakciók vizsgálata pedig szociálpszichológiai szempontból is megközelíthető.*

Báthory alapvetően a Berner[9] által bemutatott német, illetve az azokból táplálkozó, viszonylag új keletű hazai modellekre (Falus Iván és munkatársai (1998)[10]) fekteti a hangsúlyt. Irányváltásként értékeli Csapó Benő (2004) képességfejlesztő-didaktikai vonulatát. Új és önálló irányzatként említi az IKT-alkalmazással kiegészített didaktikai irányzatot, melyet a digitális didaktika névvel jellemez Kárpáti Andrea nevéhez kapcsolva.[11] A Berner által felsorolt modellek közül, mint a hazai didaktika fejlődésére legjelentősebben ható irányzatokat a kognitív, az információelméleti-kibernetikai és a konstruktivista didaktikai irányzatokat emeli ki.

Nem elhanyagolható azonban az angolszász hatás sem a didaktika fejlődésmenetében. Az alapvető különbség, némileg leegyszerűsítve a német irányzatokhoz képest az, hogy az angolszász irányzat nem alkot jól körvonalazott modelleket, sokkal kevésbé elméleti. Alapvetően a társadalmi szükségletekből indulva gyakorlati, illetve gyakorlat közeli nézőpontból indul ki. A Báthory által említett folyamat, a didaktika feloldódása leginkább az angolszász területen figyelhető meg, Ollé Jánost idézve:

> *„…ha kijelöljük közülük a pszichológiai, oktatás-lélektani megközelítéseket, akkor nem sok marad, amit didaktikának nevezhetnénk."*[12]

Mindazonáltal elismerve a német hatásokat az előbb említett Falus Iván és munkatársai által megalkotott rendszerben, véleményem szerint abban jól felismerhető a pragmatikusságra, szinte közvetlen alkalmazhatóságra törekvő angolszász hatás is.

Összefoglalva és kicsit leegyszerűsítve a kibontakozott vitát, látható, hogy leginkább a didaktika és a más tudományok közötti határ pontos helyének a meghatározása vált

---

[8] Uo.

[9] Berner, Hans: *Az oktatás kompetenciái.* Budapest, 2004, Aula Könyvkiadó.

[10] Falus Iván (szerk.): *Didaktika. Elméleti alapok a tanítás tanulásához.* Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó.

[11] Kárpáti Andrea: Digitális pedagógia. *Új Pedagógiai Szemle,* 1999/4. sz. 76–89.

[12] Ollé János: Mérföldkő vagy fordulópont? *Pedagógusképzés*, 2007/1–2. sz. 44.

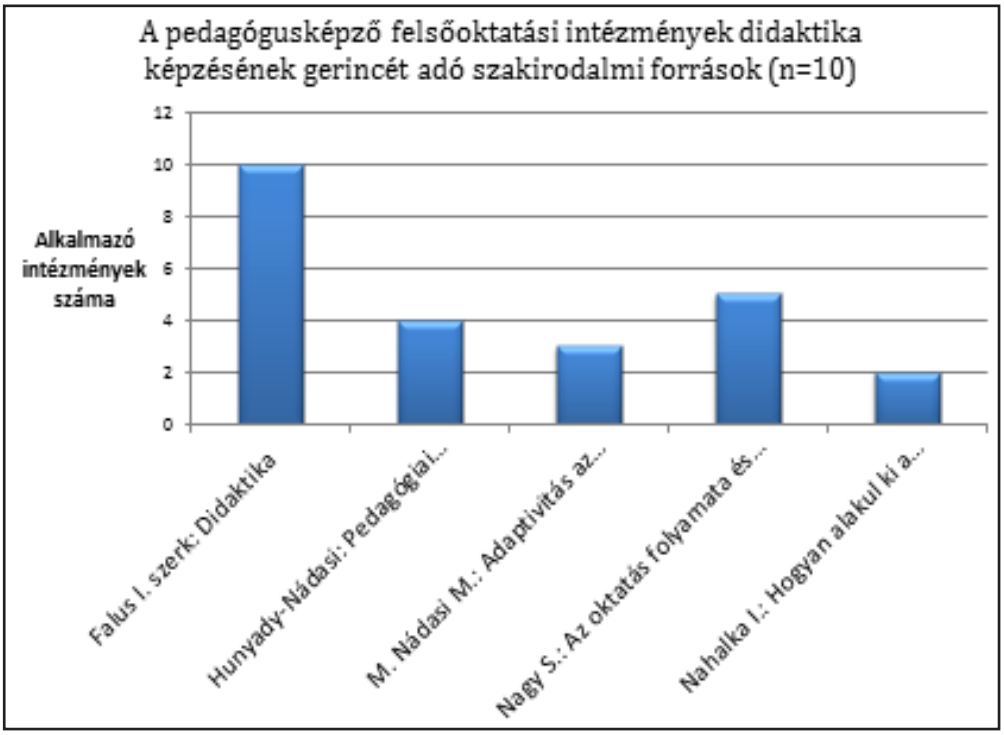
kérdésessé. Ám abban szinte mindenki egyetért, hogy szükség van a pedagógia egy olyan területére (melyet nem biztos, hogy didaktikának kell elnevezni), mely a tanítás-tanulás folyamatára, mint egészre tekint. Igyekszik ahhoz egyre több, leginkább a gyakorlatban használható támpontot nyújtani oly módon, hogy az egyfajta általánossággal is bírjon, kicsit elmozdulva a német nyelvterület elméleti rendszeralkotó didaktikájától az angolszász terület pragmatikusabb didaktikája felé tekintve.

A 6–12 éves korosztályt tanító hazai pedagógusok didaktikaképét és szemléletmódját befolyásoló tényezők

A bevezető részéből egyértelműen kitűnik, hogy többfajta didaktika-felfogás létezik, azonban a magyar pedagógustársadalom nem ismeri mélyrehatóan ezeket a felfogásokat, illetve képzése során nem kapott ennyiféle oldalról képet a didaktika helyzetéről. Éppen ezért az előbbiekben ismertetett akadémiai vita leginkább neveléstudományi szakemberek, egyetemi oktatók körében számíthatott érdeklődésre. Érdemes tanulmányozni, hogy a pedagógusok milyen didaktikaképpel rendelkeznek. Ennek a didaktikaképnek az egyik forrása kétségkívül a tanulmányaik során érintett didaktikai megközelítés vagy megközelítések. Az idősebb pedagógus-generáció esetében sokkal kevésbé beszélhetünk sokszínűségről, illetve különböző didaktika-felfogások egyidejű bemutatásáról. Érdemes azonban áttekintenünk, hogy jelen pillanatban a különböző, a 6–12 éves korosztály oktatására felkészítő tanítóképző, tanárképző intézményekben az oktatott didaktika tananyag, illetve tematika hogyan épül fel. Az előző vitához kapcsolódva fel kell térképeznünk, hogy egyáltalán létezik-e didaktika nevű tantárgy ezekben az intézményekben. Másrészről jó lenne képet kapni arról is, hogy a gyakorló pedagógusok a tanítás-tanulás mely megközelítését alkalmazzák napi feladataik ellátása során a pedagógiai tervezésben. Ennek vizsgálatára kétfajta módszert alkalmaztam. Egyrészt dokumentumelemzést használva átnéztem a tanítóképzéssel foglalkozó felsőoktatási intézmények didaktikatematikáit, illetve a neveléstudományi tantárgyak struktúráját a didaktika tantárgyra fókuszálva. Az egyes didaktikatematikákat egybevetve igyekeztem feltérképezni, hogy milyen megközelítésekkel dolgoznak. Ennek egyik tényezője, hogy milyen didaktikajegyzeteket alkalmaznak, szerepeltetnek tematikáikban a kötelező irodalmak között. A vizsgálatban a következő felsőoktatási intézményekből gyűjtött tematikákat sikerült összevetnem:

- Apor Vilmos Katolikus Főiskola
- Eötvös Loránd Tudományegyetem Pedagógiai és Pszichológiai Kar
- Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar
- Eszterházy Károly Főiskola Tanárképzési és Tudástechnológiai Kar
- Károli Gáspár Egyetem Tanítóképző Főiskolai Kar
- Nyíregyházi Főiskola Tanítóképző Intézet
- Nyugat-magyarországi Egyetem Művészeti, Nevelés- és Sporttudományi Kar
- Pázmány Péter Katolikus Egyetem Bölcsészet- és Társadalomtudományi Kar
- Pázmány Péter Katolikus Egyetem Vitéz János Kar
- Szent István Egyetem Alkalmazott Bölcsészeti és Pedagógiai Kar

Az alábbi grafikonon foglaltam össze a tanítóképzéssel, illetve a tanárképzéssel foglalkozó felsőoktatási intézményekben (2012-es adat) fellelhető tematikákból a didaktika tantárgy tanítása során alkalmazott fő szakirodalmi műveket. A grafikonon csak azok a művek láthatók, amelyek legalább két intézményben szerepelnek a kötelező irodalmak listáján. A listából kitűnik, hogy szinte egyeduralkodó a Falus Iván által szerkesztett Didaktika[13] című jegyzet. Áttekintve a tematikákat, látható, hogy a jegyzetben szereplő stratégiai szempontú megközelítés viszont kizárólag az ELTE TÓK, illetve az ELTE PPK képzésében szerepel. Ezen kívül öt helyen is felbukkan még Nagy Sándor: Az oktatás folyamata című könyve a didaktika tantárgy kötelező irodalmai között.

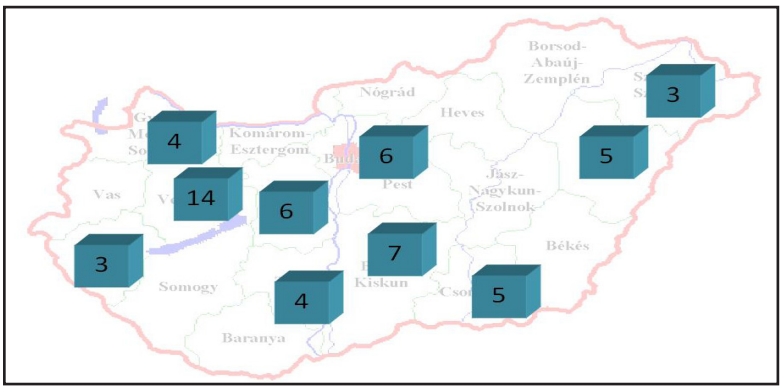


1. ábra: A pedagógusképzésben a didaktika oktatásában leggyakrabban alkalmazott szakirodalmak

Mivel a Falus Iván szerkesztette Didaktika című könyv szinte egyeduralkodónak tekinthető, valószínűleg nem járunk messze az igazságtól, hogyha a könyv által tárgyalt didaktika-felfogást a pedagógusok fiatalabb generációjának szélesebb körében ismertnek tételezzük fel. A másik forrás, amelyből a pedagógusok didaktikaképére lehet következtetni, szintén dokumentumelemzés. Itt azonban a pedagógusok által készített óravázlatoknak az órafelépítését elemeztem didaktikai szempontból. A minta egy más célból

[13] Falus Iván (szerk.): *Didaktika. Elméleti alapok a tanítás tanulásához.* Budapest, 2003, Nemzeti Tankönyvkiadó.

létrehozott óravázlat-gyűjtemény volt. Három pedagógus-továbbképzési tanfolyam[14] záró feladataként egy tetszőleges, 1–4. osztály számára tervezett anyanyelvi órának az óravázlatát kellett leadni. Az órának új ismeretet feldolgozó órának kellett lennie, ám az nem volt megkötés, hogy az anyanyelv és irodalom műveltségterület mely tantárgyáról szóljon. Vegyesen érkeztek olvasás-, fogalmazás- és nyelvtan-óravázlatok, a célkorosztály tehát 6–10 éves korig terjedt. A tanfolyam, melynek záró feladata volt az óravázlat elkészítése, közvetve tartalmazott utalásokat a korszerű oktatási formákra, illetve digitális tananyagok felhasználására. A tanfolyam tematikájában sor került néhány digitális tananyag bemutatására is. Sajnálatos módon ezek egyetlen óravázlatban sem szerepeltek ezután. Az óravázlatokban az új ismeretek feldolgozás-menetét tekintve egyeduralkodónak számított a Nagy Sándor-féle modell, mely Nagy Sándor: Az oktatás folyamata és módszerei című könyvében található, ám részletesen bemutatja a Falus Iván által szerkesztett Didaktika- Elméleti alapok a tanítás tanulásához című könyv is. Arra, hogy döntő többségében ezt a felfogást vették alapul az óravázlatok készítői, az egyes didaktikai mozzanatok szabályszerű és a Nagy Sándor által használt terminológiával teljesen megegyező megnevezések és struktúra mutatják. Az óráknak szinte egységes volt a felépítése, bár ez semmiképpen nem következhetett a tanfolyam anyagából, ugyanis ott ezt a kérdést nem érintették. A tanfolyamok résztvevői földrajzilag különböző helyekről érkeztek, előtte és utána csak az egy iskolából jövők (nem volt jellemző, mindössze négy esetben) találkoztak egymással, illetve más közös rendezvényen nem vettek részt. Bár egyéni életútjuk nem ismert, a szórt elhelyezkedésből egyértelműen következtethetünk arra, hogy valószínűleg különböző pedagógusképző intézményekben szerezték tanítói diplomájukat.



2. ábra: A tanulási folyamat felépítése szempontjából elemzett óravázlatokat benyújtó pedagógusok lakóhely szerinti eloszlása

[14] http://www.dinasztia.hu/webset32.cgi?Dinasztia@@HU@@10@@942137655, utolsó letöltés: 2013. március 14.

Az óravázlatok között konstruktív megközelítéssel nem találkoztam, bár a konstruktív pedagógia alapjairól szóló mű[15] több pedagógusképző intézményben is az ajánlott, illetve a kötelező irodalmak között szerepel, lásd az előző grafikont.

Az elemzett óravázlatok között két helyen találkoztam a kooperatív pedagógia megközelítésmódját alkalmazó órafelépítéssel. Ez a két pedagógus földrajzilag ugyanabból a kis faluból érkezett. Vélhetően már részt vettek kooperatív pedagógiával is foglalkozó tanfolyamon vagy képzésen. Erről azonban közvetlen információk nem állnak rendelkezésemre.

A fentiekből kitűnik, hogy a didaktika szerepével és értelmezésével kapcsolatos szakmai viták mintha érintetlenül hagyták volna a tanítóképzést, és elmondhatjuk, hogy ott jobbára a német hatású, elméleti, rendszeralkotó didaktikai megközelítés a domináns. A tanítóképzés speciális jellegét az adja, hogy a tanító meg kell, hogy ismerje az általa tanított sokféle tantárgy módszertanát, ám ehhez feltétlenül szükséges egyfajta egységes rendezőelv, mely a szaktárgyi vonatkozások eltérései mellett egységében és összefüggéseiben mutat utat ebben a relatív sokszínűségben. Ez a rendezőelv egyértelműen a didaktika, ám tartalmában, nézőpontjában és főleg több szempontúságában mindenképpen megújulásra szorul.

Irodalomjegyzék

Barkó Endre: *Kommunikatív didaktika.* Budapest, 1998, Dinasztia Tankönyvkiadó.

Báthory Zoltán: Létezik még didaktika? *Pedagógusképzés*, 2006/1–2. sz. 53–54.

Berner, Hans: *Az oktatás kompetenciái.* Budapest, 2004, Aula Könyvkiadó.

Buda András: Létezik-e didaktika? *Pedagógusképzés*, 2007/1–2. sz. 53.

Falus Iván: Az oktatás stratégiái és módszerei. In uő. (szerk.): *Didaktika. Elméleti alapok a tanuláshoz.* Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó, 271–318.

Falus Iván (szerk.): *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe.* Budapest, 1996, Keraban Könyvkiadó.

Falus Iván (szerk.): *Didaktika. Elméleti alapok a tanítás tanulásához.* Budapest, 1998, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Falus Iván (szerk.): *Didaktika. Elméleti alapok a tanítás tanulásához.* Budapest, 2003, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Kárpáti Andrea: Digitális pedagógia. Új Pedagógiai Szemle, 1999/4. sz. 76–89.

Martinkó József*:* A didaktika alulnézetben. *Pedagógusképzés*, 2007/1–2. sz. 55–57.

Nagy Sándor: *Az oktatáselmélet alapkérdései*. Budapest, 1981, Tankönyvkiadó.

Nahalka István: *Hogyan alakul ki a tudás a gyermekekben? Konstruktivizmus és pedagógia* Budapest, 2002, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Nahalka István: *Az általános didaktika és az informatikatanítás didaktikájának egymásra hatása*. *Plenáris előadás*. Info Savaria Konferenciakötet, Szombathely, 2010.

Ollé János: Mérföldkő vagy fordulópont? *Pedagógusképzés*, 2007/1–2. sz. 44.

[15] Nahalka István: *Hogyan alakul ki a tudás a gyermekekben*? Budapest, 2002, Nemzeti Tankönyvkiadó.

ÖRÖKÉRVÉNYŰSÉG ÉS AKTUALITÁS AZ ÓVODAI „MATEMATIKAI" NEVELÉSBEN

Villányi Györgyné

c. főiskolai docens

Végigtekintjük azt az utat, amit az iskoláskor előtti nevelésben megtettünk a matematikai oktatástól a matematikai jellegű tapasztalatszerzésig, felfedezésig. Érdemes kiemelni azokat az értékmegőrző tényeket, melyek állandóságukkal igazolják a megőrzés lehetséges megvalósítását.

Hogyan jutottunk el a gyermekközpontú, nevelésközpontú, személyiségközpontú elvek megvalósításához az óvodai nevelés gyakorlati megvalósításában? Hogyan valósul meg matematikai tartalmú tevékenységek során a differenciálás, az egyéni bánásmód alkalmazása, a gyermek éppen aktuális fejlettségéhez és érdeklődési, adottságbeli irányultságához igazodó nevelési elvek érvényesítése?

Kulcsfontosságúnak tekinthető az óvodapedagógus szakmai felkészültsége, a gyermekközpontú szemléletmód erős megléte hivatásának gyakorlásában. Fontos kitérni arra is, hogy a tanulási környezet változásai mennyiben és milyen mértékben teszik szükségessé a fejlesztési módszerek, a használatos eszközök megőrzését, illetve aktualizálását, fejlesztését, változások elfogadását, beépülését.

Ha végigtekintjük azt az utat, amit az iskoláskor előtti nevelésben megtettünk a számtan, a matematikai oktatástól a matematikai jellegű tapasztalatszerzésig, felfedezésig, rádöbbenünk arra, hogy a 186 év alatt nagy változások történtek a magyar óvodai nevelés területén. Érdemes kiemelni azokat az értékmegőrző tényeket, melyek állandóságukkal igazolják a megőrzést és ehhez társítani a változásokkal kapcsolatban megszületett új, fejlesztést biztosító tendenciák sorát.

Az 1800-as években az óvodák születésének időszakában az iskolai oktatás pótlása miatt szükség volt az alapvető számolási készségek megalapozására, hiszen sokan még az elemi 4 osztályt sem végezték el. A nagy létszámú gyermekcsoportokban frontális foglalkoztatási forma keretében kevés eszközzel, sokszor eszköz nélkül – sajátították el az ismereteket.

Az óvóképző intézetek részére készült kézikönyvben az értelemfejlesztés érdekében szakmai elemzések, vázlatok olvashatók.[16] A tárgyak tulajdonság szerinti összehason-

[16] Szerdahelyi Adolf: *A kisdednevelés és módszertan kézikönyve, Óvóképző intézetek, szülők és gyermekmenedékházak számára. A kisdedóvási törvényhez alkalmazott új kiadás*, Budapest, Rávai Testvérek Kiadása, 1890.

látása igen kiemelt feladatként volt jelen az értelemfejlesztés folyamatában[17]. A következő témák kerültek feldolgozásra: magas–alacsony, rövid–hosszú, vékony–széles, kör, kúp, gúla, az alma gurul, súly stb. A számolás valamivel kevesebb hangsúlyt kapott. Az irányított beszélgetések eszköz nélkül valósultak meg. A párbeszéd a gyerek és a felnőtt között sok esetben emlékképeken, vagy elképzelésre építve került sorra.

Sok gyerekben a hallott magyarázatok nem indították el azokat a folyamatokat, melyek útján megértette volna azokat az alapvető jelenségeket, melyek a számfogalom kialakítását kívánták segíteni.

Az „Asztalos játék" keretében, asztalkészítés közben a szerszámhasználat mellett a mérés és a számolás is szerepet kapott.[18] Itt már megjelenik a tevékenység, mint fontos elem a gyermeki tanulás folyamatában.

A VII. egyetemes tanítógyűlésről[19] készült beszámolóban olvasható az a határozati javaslat, ami ráirányította a nevelők figyelmét azokra az értékekre, melyek fontosak a gyerekek tanulási folyamatában. A hét ajánlás közül azokat emelem ki, melyek ma is fontos elvek a nevelés folyamatában: A 3. pont az egyéni bánásmód fontosságát emelte ki, ami mögött kiemelt szempontként jelenik meg a gyermek megismerése és az arra épített fejlesztő munka megtervezésének fontossága. Az 5. és 6. pont tartalmazta az értelmi nevelés fontosságát. A Temesvári kisdednevelési kiállításról[20] szóló beszámolóban van szó az apró alaki munkákról. „Az alaki foglalkozás a kisdednevelésnek igen fontos tényezője, mert a kisded értelemfejlesztésének és az öntevékenységnek hathatós eszköze."

Hogyan is alakult a kisgyermekkori tanulási folyamattal kapcsolatos elvárások sora?

A múltban elfogadott kisgyermekkori tanulási folyamatban az alapvető ismeretek átadása kapott központi szerepet. A kötött, irányított, egész csoport számára szervezett tevékenységek sora valósult meg a kötött foglalkozások során. A módszerek: bemutatás, szemléltetés, magyarázat, feladatlap, irányított tevékenykedtetés. [21]

Jól igazolják ezt az óvodapedagógus jelöltek visszajelzései, amikor felidéződnek saját emlékképeik óvodai életükből. Pl. a játékeszközök felsorolásakor, alkalmazásukra utalva elmondták, hogy „Igen, kacsával játszottunk, úsztak a tóban, és meg kellett mondani, hogy hány kacsa úszik, hány van a parton!" Itt nem a felfedezés, a tapasztalat vezet a tudáshoz, hanem a kiadott feladat teljesítése. „Ja, és volt feladatlap is" – szólnak többen is – ráismerve és/vagy felismerve a tevékenységekben rejlő matematikai tartalmakat. És akkor záporoznak az emlékek, felidéződnek az átélt és mély nyomot hagyó események. Ezek nem mindig pozitívak. „ Féltem, hogy tudok-e válaszolni…".

---

[17] u. o. 140–157.

[18] u. o. Asztalos játék leírása 155–157.

[19] Kisdednevelés, szülők, kisdednevelők és a nevelésügy barátai számára XLI. évf., kiadja a Kisdednevelők Országos Egyesülete, 11. szám, 1912. Budapest, június 1. A kisdednevelés reformja, 305–306.

[20] u. o. 14. szám, 1912. Budapest, július 15. 381.

[21] Villanyi Györgyné: A gyermekismeret fontossága az óvodáskori tanulásban In: *Hasznos tudnivalók az óvodáskorú gyermekekről. Tág a világ sorozat*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.

1953, 1967	1971, 1989	1996, 2009, 2010, 2012
3. Számú Módszertani levél, Nevelőmunka az óvodában	Az óvodai nevelés programja	Óvodai nevelés országos alapprogramja
óvodai foglalkozások	tartalmi előírások	elvek
oktatásközpontúság	intézményközpontúság	gyermekközpontúság
egyforma követelés életkoronként tantárgyanként	követelmények, fejlődés jellemzői életkoronként, nevelési területenként	fejlődés várható jellemzői az óvodáskor végére testi, lelki, szociális érettség alapján
módszertani előírások betartása	ajánlott módszerek	módszertani szabadság

1. táblázat: A tartalmi szabályozások alakulása[22]

A táblázatban megjelenített változási folyamatok jól mutatják a tanulási folyamatokban bekövetkezett irányvonalakat. Kiemelten a személyiségközpontúság felé vezető utat (melynek eléréséhez még kellenek lépcsőfokok), az elvárt fejlődési szintek tartalmi változásait, és azokat a módszertani szabadságot biztosító lehetőségeket, melyek a kisgyermekkori nevelés eredményességét teszik megvalósíthatóvá.

Az örökérvényű értékek, melyek minden nevelési korszakban megfelelő odafigyelést kaptak, meghatározták a fejlesztési irányokat. Ezek a következők:

- a kisgyermekkor speciális jellemzői,
- a játék, kiemelten a szabad játék mint alapvető tevékenység és eszköz,
- az egyéni bánásmód, differenciált fejlesztés,
- mozgás, élmény, tapasztalat, felfedezés, tevékenység,
- a pedagógusszerep és tudás fontossága.

Az örökérvényű értékek alapján folyó kutató és fejlesztő munkálatok alapján jutott el a kisgyermekkori tanítási és tanulási folyamat a ma elfogadott szintre, amit az Alapprogram elvei is hirdetnek, kiemelten *„A tevékenységekben megvalósuló tanulás”* című fejezetrészben[23]. Az érdeklődésre, fejlettségi szintre épített gyermeki aktivitás és öntevékenység biztosítása kezdeményezéssel, céltudatosan irányított tanulást támogató környezet megteremtésével, helyi szokásokra, igényekre épített szervezeti formában valósul meg. Kiemelt szerepet kap az utánzás, minta és modellkövetés, a játék, a felfedezés, a kreativitás, a cselekvéses tanulás, a gyakorlati problémamegoldás. Tehát nem az oktatási kényszer, az értelmetlennek tartott irányított feladatadások zöme uralkodik az óvodai nevelésben.

[22] Villányi Györgyné: *Örökérvényűség és aktualitás az óvodai nevelésben*. Előadás, Miskolc, Tani-tani Konferencia VII. 2014.02.07.

[23] Óvodai nevelés országos alapprogramja 363/2012 (XII. 17.) *Kormányrendelet* V. fejezet

A játékban, a közvetlen környezetben található jelenségek felfedezése során tapasztalják meg a gyerekek azokat a tárgyi tulajdonságokat, melyek a forma, a mennyiség és a téri viszonyok alapvető kérdéseiben adnak megfelelő alapokat. A matematikai jellegű tapasztalatszerzések, az ismeretek sokféle alkalmazási módjai során alakul az ítélőképesség, fejlődik a téri-, síki-, és mennyiség-szemlélet.[24]

A szociális tanulás elve érvényesül az óvodai tanulás folyamataiban. A facilitáló közegben[25] az óvodapedagógus és a kortársak hatásai a fejlesztési folyamatok támogató, segítő, mozgató rugóivá vállnak. A biztonságérzet mellett az óvodapedagógus megteremti a tapasztaltatás, a felismerés és ráismerés útján jelentkező sikerélményeket a matematikai jellegű tevékenységekben. Az elkötelezett és szakmai kompetenciával rendelkező óvodapedagógus kulcsszerepet tölt be ebben a folyamatban.

Mindezen feltételek eredményeként lehet elérni arra a célra, amit Szendrei Julianna fogalmazott meg könyvében: *„Azt hiszem, a matematikát is csak az szereti meg, aki sokszor éli át az öröm érzését a vele való foglalkozás során"* [26].

Két olyan idézettel zárom a felvázolt gondolatsort, amelyek örökérvényű megállapításként – megírás idejétől függetlenül - mottóként említhetők:

„Az a fontos, hogy mondanivalómat a tanítandó korosztály gondolkodási sajátosságaihoz tudjam igazítani"
(Szendrei Julianna 2005)

Némelyek valóságos tanódát,
mások csupán játékhelyt látnak az óvodákban,
s kellő középutat csak igen kevesen tudják eltalálni"
(Ney Ferenc 1847)

Irodalomjegyzék

Az óvodai nevelés programja. Tankönyvkiadó 1971,; Országos Pedagógiai Intézet 1989.
Kisdednevelés. XLI. évf., kiadja a Kisdednevelők Országos Egyesülete, 11. szám
Knausz Imre: *A tanítás mestersége*. Egyetemi jegyzet, Budapest, Miskolc, Soros Alapítvány, 2001.
Módszertani levelek. Tankönyvkiadó, 1953.
Nevelőmunka az óvodában. Útmutató óvónők számára. Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.
Óvodai nevelés országos alapprogramja 363/2012 (XII. 17.) *Kormányrendelet*
Szendrei Julianna: *Gondolod, hogy egyre megy?* Tipotex Kiadó, Budapest, 2005.
Szerdahelyi Adolf: *A kisdednevelés és módszertan kézikönyve*. Budapest, Rávai Testvérek Kiadása, 1890.

[24] u. o. A külső világ tevékeny megismerése 1., 2. pont
[25] Knausz Imre: A tanítás mestersége. Egyetemi jegyzet, Budapest, Miskolc, Soros Alapítvány, 2001.
[26] Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex Kiadó, Budapest, 2005. 42.

Villanyi Györgyné: A gyermekismeret fontossága az óvodáskori tanulásban In: *Hasznos tudnivalók az óvodáskorú gyermekekről*. Tág a világ sorozat, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.

Villányi Györgyné: *Örökérvényűség és aktualitás az óvodai nevelésben*. Előadás, Miskolc, Tani-tani Konferencia VII. 2014.

A DIGITÁLIS TEVÉKENYSÉG ÉS VISELKEDÉS KOMPETENCIA KÖZÖSSÉGI DIMENZIÓJÁNAK VIZSGÁLATA

Domonkos Katalin

PhD-hallgató
ELTE PPK Neveléstudományi Doktori Iskola

A digitális technológia olyan megváltozott társadalmi elvárásokat teremtett, melyeket nem hagyhatnak figyelmen kívül a neveléstudomány szakemberei sem. A digitális állampolgárság jelenségét vizsgáló kutatócsoportunk a nevelés és oktatás kérdéseit középpontba helyezve, a digitális társadalomban szocializálódó egyének tevékenységére összpontosítva vizsgálta a digitális állampolgárság fogalmát (Ollé és mtsai 2013). A kutatás során az ISTE által kidolgozott modellt továbbgondolva (Ribble 2007; Ribble 2011; Ollé 2012) létrehoztunk egy strukturált modellt (Digitális állampolgárság modell), melynek kompetenciaterületei a (1) kommunikáció és eszközhasználat, (2) tevékenység és viselkedés, (3) értékteremtés és produktivitás. A második kompetenciaterület hangsúlyos elemei a digitális lábnyom, az e-etikett, a szerzői jogok és az elektronikus zaklatás (cyberbullying).

A kutatás saját készítésű, online kérdőívei 2013. szeptember 17. és 2013. október 7. között voltak elérhetőek. A háttérkérdőívet és a második kompetenciaterület kérdőívének jeligék alapján való egyeztetése után 407 értékelhető nappali tagozatos tanulói kérdőívet kaptunk. Az eredmények azt mutatják, hogy saját értékelésük alapján a diákok 31%-a úgy véli, a valósághoz képest túl negatív képet mutat róla digitális lábnyoma. Az elektronikus zaklatást vizsgálva kiderül, hogy a diákok 40,5%-a áldozatként, 36,9%-uk elkövetőként érintett.

A digitális eszközök által meghatározott közegre jellemző, hogy nincs megelőlegezett tudás, ezért az online társadalmi normák, szabályok és szokások gyakran nem egyértelműek. A digitális technológia mindennapivá válásával egyre sürgetőbbé válik a felhasználók felkészítése az infokommunikációs technológiával átitatott társadalmi-közösségi életre, melyhez az oktatás szereplőinek hozzájárulása is szükséges. A digitális állampolgárság modell ehhez a felkészítéshez nyújthat egy oktatás- és nevelésközpontú elméleti keretet, mely rendszerezve foglalja magába mindazokat a kompetenciákat, melyek elengedhetetlenek a konstruktív és proaktív digitális tevékenységhez, magatartáshoz.

A digitális állampolgárság fogalmának szociológiai (Ohler, 2012) és neveléstudományi értelmezése (Ribble, 2009) közül mi az utóbbi elméleti keretet tekintettük a kutatás kiindulópontjának, melyet továbbgondolva megalkottuk egy három fő kompe-

tenciacsoportból álló strukturált digitális állampolgárság modellt (ELTE PPK ITOK, DÁ, 2013). A három fő terület további tíz részkompetenciát foglal magába *(1. táblázat).*

Kompetenciacsoport	Kompetenciák
Kommunikáció és eszközhasználat	digitális kommunikáció digitális eszközhasználat digitális hozzáférés
Tevékenység és viselkedés	digitális egészség digitális én-megjelenítés digitális együttélés
Értékteremtés és produktivitás	értékteremtés produktivitás időgazdálkodás tartalomszervezés

1. táblázat: Az ELTE PPK ITOK digitális állampolgárság modell kompetenciaterületei (Ollé és mtsai, 2013)

A digitális állampolgárság jelenségét vizsgáló kutatócsoport tagjaként a DÁ 2013-modell három kompetenciaterülete közül a digitális tevékenység és viselkedés közösségi részterületével, a digitális együttélés elemeivel foglalkoztam.

A digitális tevékenység és viselkedés kompetenciája a közösség tagjai által elfogadott normákat és szokásokat figyelembe vevő, tudatos digitális életvezetés vagy viselkedés, ami magába foglalja a digitális felületek biztonságos, adekvát, törvényes, etikus valamint a közösség számára értéket teremtő használatát (Domonkos és Szabó, n.a.). A kompetenciaterület a gyakorlatban kevéssé elválasztható egyéni és közösségi területeket, azokon belül további három részkompetenciát foglal magába *(2. táblázat).*

Tevékenység és viselkedés	
Egyéni részterület	Közösségi részterület
Digitális egészség • fizikai • pszichés	Digitális együttélés • törvényi szabályok • elektronikus zaklatás • szerzői jog • társas normák • e-etikett
Digitális lábnyom	

2. táblázat: A digitális tevékenység és viselkedés kompetenciaterület elemei (Ollé és mtsai, 2014)

A kutatás bemutatása

A kutatás négy részből álló (1 háttérkérdőív és 3 kompetenciacsoport kérdőíve) saját készítésű online kérdőívei 2013. szeptember 17. és 2013. október 7. között voltak elérhetőek. A kérdőív adatainak letöltése után technikai jellegű változtatásokra (átkódolás, konvertálás) volt szükség, majd tanuló és pedagógus részminták adattábláinak vizsgálata az SPSS programcsomag használatával történt. A háttérkérdőívet és a digitális együttélés részkompetencia terület kérdőívének jeligék alapján való egyeztetése után 407 nappali tagozatos tanulói és 169 tanári értékelhető kérdőívet kaptam.

A tanulói minta 46,2%-a lány, 53,8%-a fiú, életkoruk felhasználásával kialakított korcsoportok pedig a következők: kora pubertáskor (10–14 év), késő pubertáskor (15–18 év) és fiatal felnőttkor (19–27 év).

A pedagógus válaszadók 77% nő, 23%-a férfi, a legnagyobb azon pedagógusok aránya, akik általános iskolában (47,3%) tanítanak, közel azonos arányúak a szakközépiskolában, gimnáziumban és a többféle intézmény pedagógusai, végül kis arányban jelennek meg a szakiskolában és gyógypedagógiai intézményben dolgozó pedagógusok. A tanítással eltöltött idő alapján létrehozott csoportok a következők: 0–4, 5–9, 10–14, 15–19, 20–24, 25–29, 30–34, 35+ év *(3. táblázat)*.

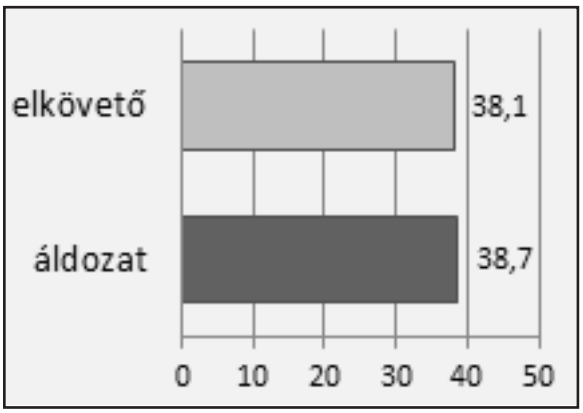
Változók	tanuló		Változók	pedagógus	
	fő	%		fő	%
Nem			**Nem**		
lány	188	46,2	nő	131	77,5
fiú	219	53,8	férfi	38	22,5
Iskolatípus			**Iskolatípus**		
általános iskola	149	36,6	általános iskola	80	47,3
szakiskola	40	9,8	szakiskola	3	1,8
szakközépiskola	179	44	szakközépiskola	22	13
gimnázium	30	7,4	gimnázium	21	12,4
főiskola-egyetem	9	2,2	gyógypedagógiai intézmény	16	9,5
Korcsoport			többféle intézmény	24	14,2
10–14 (kora pubertás)	91	22,5	egyéb (felnőtt-oktatás, magán-társaság, alaptvány)	3	1,8
15–18 (késő pubertás)	223	54,7			
19–27 (fiatal felnőtt)	90	22,1			

3. táblázat: Demográfiai változók

Az eredmények bemutatása

Az elemzés első fázisában arra kerestem a választ, hogy a megkérdezett tanulók saját bevallásuk szerint mennyire érintettek az elektronikus zaklatás áldozati és elkövetői szerepeit tekintve. A jelenség vizsgálatára általános-szubjektív, és objektív, azaz konkrét megjelenési formákra vonatkozó kérdések vonatkoztak (Vandebosch – Cleemput, 2009). Az általános kérdések a „Bántottak-e az interneten az elmúlt egy évben?" és a „Bántottál valakit vagy valakiket szándékosan az interneten az elmúlt egy évben?" voltak. Az objektív mutatók kérdései a következő megjelenési formákra vonatkozóak voltak: lángháború, zaklatás, befeketítés, kiközösítés, személyiséglopás, kibeszélés, fenyegetés (*3. táblázat*, Willard, 2005; Tabby Project, 2012).

Az elektronikus zaklatást vizsgálva kiderül, hogy a diákok majdnem fele áldozatként, közel 40%-uk elkövetőként érintett. A megjelenési formákat és az áldozati szerepet tekintve a tanulók körében a leggyakoribb zaklatási forma a bántó üzenet küldése (M=2,38; SD=1,305), a lángháború (M=2,36; SD=1,368) és a fénykép engedély nélküli megosztása (M=2,34; SD=1,371). Az áldozat szemszögéből a legkevésbé jellemző típusa a személyiséglopás (M=2,12; SD=1,323) és a személyes információ megosztása (M= 2,08; SD=1,192) (Domonkos – Ujhelyi, 2014).



1. ábra: Elektronikus zaklatásban való érintettség szerepek szerint (tanuló, %)

A továbbiakban a diákoknak és a pedagógusoknak a felelős online tevékenységgel kapcsolatos önjellemzésük kapcsán vizsgáltam, hogy milyen mértékben mérlegelnek az online tevékenységekkel kapcsolatban. *(4. táblázat)*. Mindkét szerepre jellemző, hogy legkevésbé az esetleg már meglévő szabályok vizsgálatát *(3.)* tartják fontosnak. A megkérdezettek leginkább a láthatóság *(4.),* a tevékenységük által okozott kár *(5.)* és a mit éreznének hasonló helyzetben *(2.)* mérlegelési szempontokat tartják lényegesnek.

Állítások	átlag	
	tanuó	pedagógus
1…tenném vagy mondanám-e szemtől szembe azt, amire készülök.	3,41	5,25
2…hogyan érezném magam, ha velem tennék.	3,60	5,47
3…van-e rá vonatkozó szabály.	3,17	4,15
4…kik fogják látni.	3,64	5,38
5…megbántok-e vele valakit.	3,65	5,46
6…azon, hogyan fogom érezni magam utána.	3,57	5,16

4. táblázat: Meggondolom, hogy… (1–6-ig skála)

A teljes mintán vizsgálva információt szerezhetünk a tanulók és a pedagógusok érzelmi viszonyulásának árnyalatairól a digitális világ együttéléssel kapcsolatos kérdéseivel kapcsolatban. Az eredmények azt mutatják *(5. táblázat)*, hogy a diákok részéről a szabályok megváltoztatásával és elfogadásával kapcsolatban nagyobb az egyetértés, ha a közösség bevonásával hozzuk létre azokat *(3.* és *9.).* A diákokkal ellentétben, a pedagógusok számára a legfontosabb az, hogy az online tevékenységek során ne bántsanak meg senkit *(1.)* és szükség van a tevékenység közösség számára való hasznosságának mérlegelésére *(2.).* az online segítségnyújtás *(7.)* és az egyén tevékenységének közösségre gyakorolt hatásának alacsony értéke *(5.* és *8.)* jelzi, hogy a felhasználók számára nem egyértelmű az, hogy saját tevékenységükkel (megosztás, intenzív érzelmek alatti online cselekvés) hatással lehetnek a felhasználókra és az online közösségre egyaránt.

Állítások	átlag	
	tanuló	pedagógus
1. Figyelni kell arra, hogy ne bántsunk meg senkit az interneten.	3,05	5,44
2. Mérlegelni kell, hogy egy tevékenység az internetes közösség számára hasznos, vagy káros.	3,06	5,24
3. Az interneten nemcsak a szabályok betartására van szükség, hanem néha a szabályok módosítására is.	3,14	4,68
4. Fontosnak tartom, hogy segítsek másokon és megvédjek másokat az interneten.	3,23	4,14
5. Mások hangulata függ attól, hogyan reagálok tevékenységükre az interneten.	3,23	3,72
6. A ritkább internethasználat is okozhatja a nem megfelelő digitális viselkedést.	3,27	3,91
7. Úgy érzem, segítenem kell másoknak az interneten.	3,32	3,57
8. Mások hangulata függ attól, hogy mit teszek az interneten.	3,35	3,48
9. A szabályok megváltoztatását, elfogadását mindig vitának kell megelőznie.	3,43	4,09

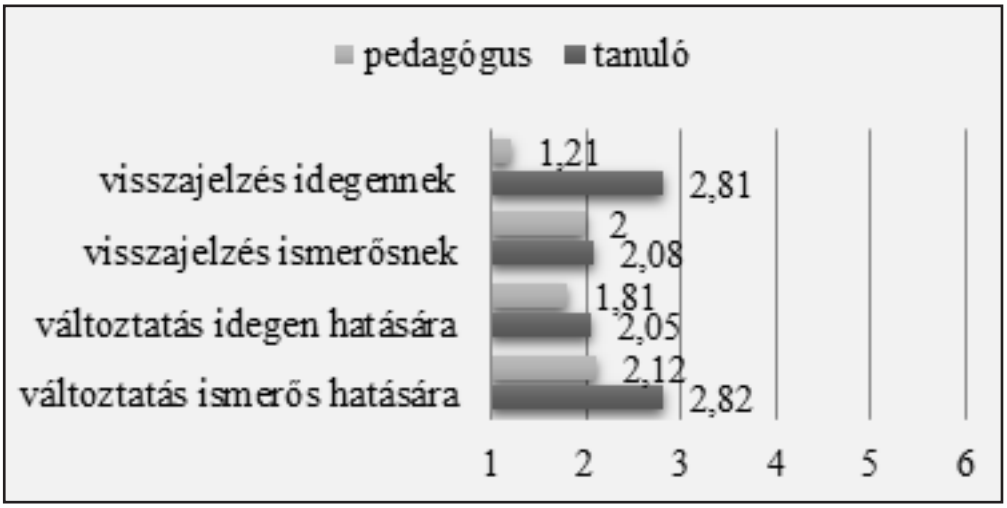
5. táblázat: Az érzelmi viszonyulás mértéke a digitális együttéléssel kapcsolatban (1–6-ig skála)

Az online tevékenységgel és viselkedéssel kapcsolatos tudatosításról kérdezve a diákokat és a pedagógusokat, mely szerint kinek a feladata az interneten való megfelelő viselkedés tanítása, figyelemre méltó eredmény született. A diákok véleménye szerint leginkább (1. hely) senkinek sem kell tanítani az online viselkedést, ezzel szemben a pedagógusok véleménye szerint a nevelési szereplők (szülők, pedagógusok) feladata ugyanez. A nevelési szereplőket követi mindkét mintában a felhasználó *(6. táblázat).*

említés	**tanuló**	**pedagógus**
1.	senkinek	szülőknek
2.	szülőknek	pedagógusoknak
3.	pedagógusoknak	felhasználónak
4.	felhasználóknak	internetes közösségnek
5.	internetes közösségnek	webhely tulajdonosnak
6.	webhely tulajdonosnak	hatóságnak
7.	hatóságnak	senkinek

6. táblázat: Kinek a feladata az internetes viselkedés tudatosítása, tanítása?

A digitális közeg kihívást jelentő és félreértésre okot adó jellegzetességei többek között a rövid, szöveges kommunikáció; a gátlástalanító hatású „szembe nézés" és a nonverbális jelek hiánya; valamint az online viselkedéssel kapcsolatos visszajelzések kisebb aránya. Az internetes tevékenységekkel kapcsolatos felhasználóknak való visszajelzéshez és a saját tevékenységeinkkel kapcsolatos változtatáshoz való viszonyulás alacsonyabb értéke mindkét mintára jellemző *(2. ábra).*



2. ábra: A kitöltők mások online tevékenységére adott visszajelzésének és saját online tevékenységgel kapcsolatos változtatásnak megítélése önjellemzés alapján (átlag, 1–6-ig skála)

Összegzés

Az infokommunikációs technológia megváltozott társadalmi elvárásokat teremtett, mellyel kapcsolatban felmerülő nevelési-oktatási kérdéseket nem hagyhatnak figyelmen kívül a neveléstudomány szakemberei sem. A digitális eszközökkel végzett különböző tevékenységek és az azokhoz kapcsolódó viselkedés korosztálytól függetlenül minden életkori csoportban megjelennek (Csepeli – Prazsák 2010), ezért fontos, hogy a különböző kompetenciákkal kapcsolatos fejlesztési szinteket ne generációk alapján határozzuk meg. Hangsúlyoznunk szükséges, hogy digitális együttéléshez szükséges tapasztalatokhoz – életkortól függetlenül – tevékenységgel, időráfordítással és fejlesztéssel-önfejlesztéssel juthatunk.

Irodalomjegyzék

Csepeli György – Prazsák Gergő (2010): *Örök visszatérés? Társadalom az információs korban.* Jószöveg Kiadó, Budapest.

Ohler, Jason B. (2012): *Digital Community, Digital Citizen*. Corwin, London, United Kingdom.

Ollé János, Lévai Dóra, Domonkos Katalin, Szabó Orsi, Papp-Danka Adrienn, Czirfusz Dóra, Habók Lilla, Tóth Renáta, Takács Anita, Dobó István (2014): *Digitális állampolgárság az információs társadalomban*. Eötvös Kiadó, Budapest.

Ribble, Mike (2009): Raising a Digital Child. A Digital Citizenship Handbook for Parents. International Society for Technology in Education. Eugene, Oregon, Washington, D.C.

T.A.B.B.Y. Projekt (n.a.): *Online bullying kézikönyv pedagógusoknak*. URL.: http://hun.tabby.eu/uploads/1/6/8/6/16865702/booklet_hun.pdf Utolsó letöltés ideje: 2014. április 10.

Domonkos Katalin – Ujhelyi Adrienn (2014): *Tevékenység és viselkedés a digitális környezetben. VI. Oktatás-Informatika Konferencia tanulmánykötet.* ELTE PPK Neveléstudományi Intézet. Budapest

Vandebosch Heidi – Van Cleemput Katrien (2009): *Cyberbullying among youngsters: profiles of bullies and victims*, New Media & Society, 11. 8. 1349-1371.

Willard N. (2007): *Educator's Guide to Cyberbullying and Cyberthreats*. URL: http://bit.ly/18cU8Yc, Hozzáférés ideje: 2013. október 10.

FOLLOW UP OF A PAPER BY JULIANNA SZENDREI & JUDIT TÖRÖK: DEVELOPING ARGUMENTATIVE SKILLS IN PRIMARY AND LOWER SECONDARY SCHOOL IN ITALY

Paolo Boero

Department of Mathematics and School of Social Sciences, Genoa University

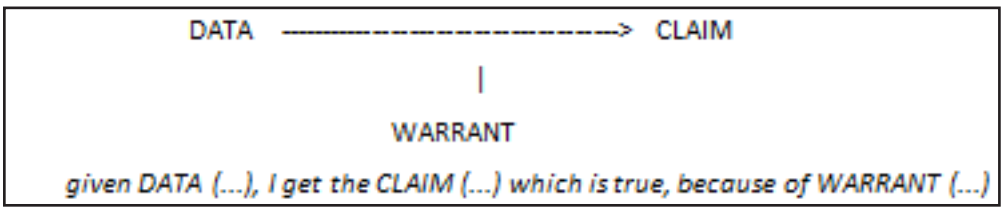
In the book Theorems in school, edited by me in 2007 for Sense Publ., Julianna Szendrei and Judit Török published the paper: The tradition and role of proof in mathematics education in Hungary. It was one of the inspiring sources of a Project developed by the Department, which I belong to, within a National Italian Project aimed at promoting students' successful approach to advanced studies in mathematics and sciences. The title of the Genoa Project was Argumentation from elementary to high school. I was a member of the scientific staff of the Project in the years 2009-2011, responsible for the Elementary School section. The Project was addressed to about 150 teachers at different school levels. Under the guide of 6 university researchers and 10 teachers experienced in research & innovation in Mathematics Education, participant teachers took part in activities of planning, performing, documenting and analyzing activities aimed at developing argumentative skills in their classrooms, with an eye to those skills that are relevant in proving. Activities were grafted onto the teachers' ordinary curriculum. In secondary school the approach to proof was also an explicit aim of classroom activities. I will present the main features of the Project on Argumentation (including its theoretical foundations), together with a balance of its results in elementary and lower secondary school (in terms of both in-service teacher education, and students' learning).

In the book Theorems in school, edited by me in 2007 for Sense Publ., Julianna Szendrei and Judit Török published a paper that was one of the inspiring sources of a Project developed by my Department (DIMA) within a National Italian Project aimed at promoting students' successful approach to advanced studies in mathematics and sciences. The Genoa Project was addressed to about 150 teachers at different school levels, from the beginning of primary school to the end of high school. Participant teachers took part in activities of planning, performing, documenting and analyzing activities aimed at developing ***argumentative skills*** in their classrooms, with an eye to those skills that are relevant in proving. In secondary school the approach to proof was also an explicit aim of classroom activities. I was a member of the scientific staff of the Project in the years 2009–2011, responsible for the Elementary School (Grades I to V) section. In this paper

I will synthesize the main features of the Project (including its theoretical foundations), together with a balance of its results in elementary and lower secondary school.

Argumentative skills in mathematical activities

Argumentation plays an important role in mathematical activities, even if other forms of reasoning and semiotic resources are needed: I remember the discussions with Julianna and Her colleagues during the ninetieths (in the frame of an European TEMPUS Project), particularly when Julianna advocated the central role of visual reasoning in the creative phases of conjecturing and, more generally, of problem solving. However an important point of agreement, suggested by Julianna during those discussions, was the relevance of argumentation not only in the phase of proof construction and understanding at the high school level, but also before, starting from elementary school: relevance in every circumstance in which students need to move from intuition and production of a mathematical idea (a solution for a word problem, a connection between different concepts, and so on) to a justification of the well-founded (or utility, or correctness) of the outputs of their creative work. This point is reflected in the paper by Julianna, with examples (p. 123–124) that inspired many activities in the Genoa Project. Another idea emerging from those discussions was that the same argumentative skills, which intervene in those phases of mathematical activities, may intervene in other activities in other disciplines.



Those discussions forced me to better situate the role of argumentation in mathematical activities and in mathematics education, and also to better frame argumentation itself. Starting from the debates with Nicolas Balacheff and Julianna and Her colleagues during our TEMPUS Project meetings, my attention was driven towards Toulmin's model of argumentation, which characterizes argumentation as a verbal production expanding around one (or more, enchained) nuclear structure:

In most cases, a warrant relies upon (or is derived from) explicit, or sometimes implicit, knowledge, theory, principles... (BACKING).

In the year 2000, NCTM standards put into evidence the necessity of promoting students' skills needed in mathematical proving since Kindergarten. In Italy, the importance of linguistic (and argumentative, in particular) skills, already advocated in the 1985 National Programs for elementary school, was further stressed in the National Orientations for Curricula (2001/2003) at every school levels. On the research side, some papers (see Pedemonte, 2007) used the Toulmin's construct to analyze the difficulties met by students in the transition from the argumentative phases of conjecturing and search for a justification, to the proof construction.

In 2009 I entered the staff of the DIMA Project to lead the work in elementary school Laboratories concerning the development of argumentative skills. My colleague Francesca Morselli was the responsible for the lower secondary school section. The DIMA Project on argumentation (see: http://pls.dima.unige.it/azione1/azione1.php) was based on the assumption, widely shared by researchers and teachers, that the difficulties met by high school students when dealing with proving and understanding of proof partly (or even mostly!) depend on their previous insufficient development of argumentative skills in mathematical activities (and in other fields too).

The DIMA Project on argumentation: The Laboratories

Coherently with the National project, which the DIMA project belongs to, a school "Laboratory" is conceived as long term (at least, one year) in-service teacher education activity in which:

- some (2-3) school teachers (experienced in research & development in Mathematics Education) and one or two university researchers work together with a small group of school teachers (from 2-3 to 15) to plan, experiment, document and analyze innovative teaching units;
- in many cases, a teaching unit for argumentation (which may engage up to 12-15 hours) is not added to the usual annual plan of classroom teaching activities, but grafted upon it - as an argumentative expansion / treatment of topics already chosen by the teacher within her annual plan;
- successful teaching units, with essential documents illustrating the performed classroom activities, are put in the Project website, at disposal of other teachers;
- moreover, teachers engaged in the Laboratory support other teachers in their school, interested in adopting the teaching units.

The DIMA Project: Activities in primary and lower secondary school, and results

Four laboratories were created within the DIMA Project for the primary school level (6–11 years old students), while two laboratories were created for the lower secondary school level (11–14 years old students); three researchers were involved in the activities, together with 6 teachers experienced in research & development in mathematics education. Some kindergarten teachers joined the primary school Laboratories.

Some units (produced during the first year in a Laboratory) were adopted and adapted by the teachers of another Laboratory during the second year, in order to get a second test with other teachers and a refinement of the units. Other Units have been produced by Laboratory teachers engaged in research & development activities, an interesting follow-up of the Project.

Within the Project, planning of classroom activities was accompanied by an intensive teacher preparation to identify the argumentative potential of different subjects (even non mathematical ones), and to analyze argumentative performances. Initially conceived as a tool for the researcher and the experienced teachers, Toulmin's model of argumentation (at least its nuclear component – see above, but sometimes also

the complete model – see Pedemonte, 2007) gradually became a tool for all teachers engaged in the Laboratories. Teachers manifested their need of identifying argumentation in students' oral and written productions, to evaluate students' argumentation and to intervene on students' difficulties in argumentation. Toulmin's model offers the possibility to evaluate the complexity of students' productions (number of enchained nuclear components), their quality (in particular, according to the pertinence and quality of warrants), the presence of implicit warrants to be brought to the surface, the underlying backings, and so on. Toulmin's model was also used (initially by the Laboratory staff, then also by the teachers involved) as a tool to identify and compare argumentation in different domains and activities, within mathematics and between mathematics and other domains.

Teachers realized that just at the beginning of elementary school (6 years old children) students were able (in a suitable educational context) to produce some forms of argumentation, which have important features in common with argumentation in advanced mathematical activities. In particular, two extra-mathematical domains emerged as suitable for developing such competences: negotiating shared rules for the classroom life, and discussing their application and their changes (from Grade I on); and: reflecting on regularities of the Italian language (as a soft introduction to grammar, from Grade 2 on). At present, in the follow-up extra-project activities, some teachers work hard (and productively) on argumentative activities concerning basic arithmetic formalisms (e. g., at the beginning of Grade I: "Is it correct to write *thirteen* as *31*? Why?" And at the beginning of Grade II: "Is it correct to write *one hundred and five* as *1005*? Why?"

Activities on argumentation introduced some changes in several teachers' practice, which put into question their conceptions of the teacher role, and of teaching as well. They realized that students (particularly in the early grades) may produce argumentation only under specific conditions:

- -they need to feel the necessity of justifying their opinions, hypotheses, choices; and they need to do it in a symmetrical position (while discussing with their schoolfellows, and not with the teacher);
- the teacher should accept all opinions, solutions, proposals without judging them, but offering them to classroom debate (thus the teacher moves from the role of judge, to the role of orchestrator/mediator of the debate);
- - the teacher should help students to produce clear, complete arguments (thus the teacher moves from a role of authority to a role of helper).

By this way, the climate changes in the classroom, and the position of the teacher too!

An interesting aspect emerged in the case of teachers who were not accustomed to this kind of educational methodology: teachers observed that their knowledge (and their evaluation) of students' skills, potential and even personality had changed! Some students very competent in traditional activities showed their limits in the proposed argumentative activities; while other students (previously considered weak, or unwilling to engage seriously) changed their attitude and showed unexpected skills and personality.

Difficulties met by teachers mainly concerned:

- classroom time needed to develop argumentative activities in a productive way;
- difficulties to manage a didactical contract (Brousseau 1997, p. 31) contrasting with the usual classroom didactical contract;
- and in particular, difficulties inherent in the management of classroom discussions where the role of the teacher must move from the management of a '*question by the teacher/answer by the student/comment, or even evaluation, of the answer by the teacher' routine*, to a *mediating role* in a genuine discussion which develops among the students themselves.

Accordingly, in the present follow-up activities teachers' preparation includes: a careful analysis of good argumentative classroom practices; and the infusion of argumentative activities into a larger part of the curriculum (as suggested by the National Orientations for curricula), in order to move to a different didactical contract in the classroom.

References

Brousseau, G. (1997): *Theory of didactical situations*. Dordrecht, NL: Kluwer A.P.

Pedemonte, B. (2007): How can the relationship between argumentation and proof be analyzed? *Educational Studies in Mathematics,* 66/1, 23–41.

Szendrei-Radnai, J. and Török, J. (2008): The tradition and role of proof in mathematics education in Hungary. In Boero, P. (Ed.) *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice,* pp. 117–134. Rotterdam, NL: Sense Publishers.

TEACHING PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS TO SOLVE NON-STANDARD PROBLEMS

Ildar Safuanov

Moscow City Pedagogical University

Due to the participation of Russian pupils in international researches PISA and TIMSS, and also after inclusion of non-standard problems of increased difficulty in the program of the Unified state examination (USE) in mathematics in Russia, actually became the problem of teaching future mathematics teachers to solve non-routine problems. In this paper, ways of teaching students of pedagogical universities to solve various types of problems of mathematical Olympiads and non-standard problems of USE are considered.

Introduction

George Polya (1981, p. xii) emphasized that prospective mathematics teachers should be taught the skill to solve mathematical problems. "…The solution of a non-routine mathematical problem is genuine creative work" (ibid.). Moreover, he indicated the importance of the discussing methods of solving problems.

In the research devoted to the analysis of problem solving, G. Polya (1957) distinguishes "problems on finding" and problems on proof. The purpose of problems of the first kind is to determine an unknown element of a problem. G. Polya considers puzzles as problems on finding. For solving them he recommends to use the general rule for all problems on finding: to understand a problem, to choose, recollect auxiliary problem, to solve a part of a problem, to keep only a part of conditions, omitting the rest.

The importance of "solving challenging problems individually and in small groups without external assistance, e.g., to develop awareness of strategies and skills for solving problems" was indicated also by Chapman (2008).

In the new Conception of the developing of Mathematical Education in Russia Federation "(2013, p.8) it is emphasized that "University students (including those preparing to become teachers in educational organizations) should solve problems of elementary mathematics in essentially greater amount than today…"

The importance of creativity in mathematical problems is also underlined in the new Standards of Main Common Education (Standards of the Second Generation…, 2011).

Furthermore, important is the fact that non-routine mathematical problems (tasks C1–C6) now constitute the essential part of the Unified State Examination (USE) in Mathematics.

The aim of this paper is to give implications for teaching prospective secondary mathematics teachers to solve non-routine mathematical problems including Olympiad

problems and problems C1–C6 of the Unified State Examination in Mathematics. In particular, the contents of the new experimental course in solving non-routine mathematical problems for prospective mathematics teachers conducted with a group of ten 4th year mathematics major students at the Moscow City Pedagogical University will be discussed.

New experimental course in solving non-routine mathematical problems for prospective mathematics teachers

Entertaining and non-standard mathematical problems have been used in teaching gifted pupils in many schools with mathematical bias in Soviet Union and Russia. Therefore, rich experience of teaching to solve mathematical problems was accumulated, and it is possible to apply this experience in teaching prospective teachers, too.

Wide known are the following methods of solving various kinds of problems (see, e.g., Kanel-Belov and Kovalji 2004, Mednikov and Shapovalov 2012):

- Invariants (in particular, parity, colorings);
- Rule of extreme (in particular: testing the infinite case, small stirs method and infinite descending);
- Mathematical induction;
- Dirichlet principle;
- Using properties of divisibility and remainders, Euclid's algorithm and congruences;
- Graphs;
- Rules of combinatorial analysis;
- Symmetry reasons;
- Backtracking;
- "Divide and conquer" principle (restricting, binary search etc.);
- Additional constructions (in geometry), etc.

Some of these methods are different manifestations of more general methods and principles and also can be combined with each other. For example, Shapovalov (2006) argues that many of these methods and principles (Principle of the extreme, Dirichlet principle, invariants and colorings, infinite descending) are manifestation of the Principle of narrow places.

In our course, we used genetic approach (Safuanov 2004). In particular, having solved a problem, we gradually establish its connection to serious mathematical theories. For example, considering naturally arising problem of Konigsberg bridges, we arrive to the important mathematical theory of Eulerian graphs.

Furthermore, note that G. Polya (1965, II, p.133) wrote that "the genetic principle may suggest the principle of consecutive phases…" The principle of consecutive phases distinguishes three phases in the solving process as well as in the development of mathematical concepts and theories: exploratory phase, phase of formalization and the phase of assimilation (ibid.)

The principle of concentrated teaching (Safuanov 1999) manifests itself in our course in several directions. Knowledge of some mathematical topics was deepened.

Some simple problems serve to the anticipation of more complex problems and mathematical theories.

The combination of functions was used: many problems serve not only to the raising the interest to studies (due to their entertaining character) but also promote the acquisition of new theoretical knowledge because they are connected to modern mathematical theories.

Finally, the means "linkage" is systematically used. One interesting problem leads to other, in some way connected with the former; thus the chains of problems are considered. For example, we offer chains of problems on weighing coins, chains of problems on checkered paper etc.

Consider the list of topics in our course:

- Using parity and other invariants in problem solving.
- Rule of extreme.
- Dirichlet principle.
- Symmetry.
- Graphs.
- Problems on weighing coins.
- Problems on crossings and transfusions.
- Problems on checkered paper.
- Problems of plain geometry (C4 of USE).
- Problems of space geometry (C2).
- Non-routine arithmetical and logical problems (C6).
- For solving and discussing these problems, we used above-mentioned methods (invariants etc.).

However, it seems expedient to tell student teachers about more general approaches. Consider in more detail the analytic-synthetic activities in problem solving (Gusev and Safuanov 2001).

The analysis and synthesis can be combined with each other.

S. L. Rubinshtein distinguished the important form of the analysis – one which is carried out through synthesis. The essence of such analysis is the following: "the object of thinking is being repeatedly included in new connections and thus it arises in new appearances, with new qualities fixed in new concepts; thus, new contents are repeatedly taken out of the object, it turns repeatedly to new sides; new properties of the object come to light" (Rubinshtein 1958, p. 98–99).

Thus, the important means of thinking arises: "the analysis through synthesis". Its role in psychology is connected with the detection of new qualities, sides and properties of objects. Therefore, this means is connected to the creative processes. S. L. Rubinshtein (1976) named this means "a quintessence of thinking".

Consider an example (from plane geometry) of application of the most advanced and complicated means of mental activity – "the analysis through synthesis".

Problem (C4 of USE, see Yashchenko et al., 2014).

AM is a median of the triangle ABC. AB=10. AC=12. AM=5. What is the area of the triangle ABC?

Solution.

We begin with the analysis. In order to find the area of the triangle *ABC*, it is necessary to know, e.g., the lengths of all three sides. However, we know the lengths of only two sides and of a median. What can we do in this situation? The idea is to construct a new triangle with the same area and known lengths of all three sides. This is a synthetic reason. So, we construct the continuation of the median *AM* by a segment *MD* so that *MD*=*AM*=5. It easy to see that triangles *ACM* and *BDM* are equal. Therefore, the area of the triangle *ABD* is equal to the area of the triangle *ABC.* Furthermore, *BD*=*AC*=12. Thus, we know the lengths of all three sides of the triangle *ABD.* One can easily find (e.g., by Heron's formula) the area of the triangle: 48.

The solution of this problem is a vivid example of the application of the analysis through synthesis. The analysis leads us here to the necessity of the additional construction.

The problem C6 usually deals with arithmetic of integer numbers. Therefore, it is connected with number theory course the student study in the university. Here also the analysis through synthesis can be applied as one see, e.g., in the solution of Problem 4 of the article by Gusev and Safuanov (2001).

First outcomes of the implementation of our course demonstrated the positive changes in prospective mathematics teachers' skills in solving non-routine problems as well as in their beliefs about the problem solving.

References

Chapman, O. (2008): *Instructional Practices to Facilitate Prospective Mathematics Teachers' Learning of Problem Solving for Teaching*. Paper presented at ICME 11, Monterrey, Mexico, July 2008.

Conception of the developing of Mathematical Education in Russia Federation (2013): Approved by the government of Russian Federation on December 24, 2013.

Gusev, V.A., & Safuanov, I.S. (2001): Analytic-synthetic activities in the learning of mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3. pp. 73-80). Utrecht, Netherlands: PME.

Kanel-Belov, A., and Kovalji, A. (2008): *How to solve non-routine problems* (in Russian). M.: MCNMO.

Mednikov, L., and Shapovalov, A. (2012): *Tournament of towns: World of Mathematics in Problems.* M.: MCNMO.

Polya, G. (1957): *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1981): *Mathematical Discovery.* New York: Wiley.

Rubinshtein, S. L. (1958): *On the thinking and methods of its study* (in Russian). M. - L.

Rubinshtein, S. L. (1976): *The problems of general psychology* (in Russian). M.: Pedagogika.

Safuanov, I. (1999): On some under-estimated principles of teaching undergraduate mathematics. – In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the*

*International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n (Vol. 3, pp. 153-160). Haifa, Israel: Technion.

Safuanov, I S. (2004). Psychological Aspects of Genetic Approach to Teaching Mathematics. In M. J. Hψines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 153-160). Bergen, Norway: PME.

Shapovalov (2006): *The principle of narrow places.* M.: MCNMO.

Standards of the second generation. Rough curricula for subject matters: Mathematics. Grades 5–9 (2011) (in Russian). Moscow: Prosveschenie.

Yashchenko, I., Shestakov, S., Trepalin, A. and Zakharov, P. (2014): *Preparation to USE in Mathematics* (in Russian). M.: MCNMO.

A FELSŐFOKÚ MATEMATIKATANÍTÁS NÉHÁNY DIDAKTIKAI SAJÁTOSSÁGA

Korándi József

ELTE TTK

A matematika didaktikának aránylag mostohán kezelt területe a felsőfokú matematikaoktatás. Pedig ennek a területnek is megvannak a maga sajátosságai és problémái. Az írás ezen sajátosságok egy részét veszi számba, és következtetéseket fogalmaz meg ezekből a felsőfokú matematikatanítás elméletére és gyakorlatára vonatkozólag.

A felsőfokú matematika oktatás több ponton is jelentősen különbözik az általános- és középiskolai matematika tanításától. Ráadásául a felsőfokú matematikaoktatás sem egységes.

Volt szerencsém taníthatni általános- és középiskolában is, valamint évek óta a felsőoktatásban tanítok matematikát. Ez utóbbi időszakban tanítottam leendő matematikusokat, mérnököket, informatikusokat is. De elsősorban a pedagógusok, leendő (időnként gyakorló) tanároknak és tanítóknak a matematikai és didaktikai képzésében vettem és veszek részt.

Úgy vélem hát, hogy némi tapasztalat birtokában próbálhatom a felsőfokú matematika-tanítás néhány sajátosságát összegyűjteni, magyarázni.

A matematika tanítását – bármely szinten – az alábbi didaktikai jellemzők alapján (is) szokás rendszerezni:

- a tanítási célok szerint;
- életkori sajátosságok szerint;
- az alkalmazott tanítási módszerek szerint.

Az egyes szempontok természetesen kölcsönhatásban állnak egymással, és kölcsönösen meghatározzák egymást.

Az oktatás célja

A célok az oktatási környezettől függően jelentősen eltérőek.

Az általános- és középiskolai matematikaoktatás fő céljai között vannak

- a matematikai kompetenciák fejlesztése;
- a matematika tanításával fejleszthető kompetenciák fejlesztése;
- matematikai tartalom átadása;
- matematikai eljárások tanítása;
- általános (matematikai) műveltség, kultúra elsajátíttatása.

A célok jelentősen mások a felsőfokú matematikaoktatásban, ráadásul képzési területenként is eltérőek.

A mérnökök és informatikusok képzésében a legfontosabb cél a konkrét matematikai tartalmak, modellek, eljárások megtanítása. Lényegében ugyanez a helyzet az összes többi képzésben is, ahol a felsőoktatásban matematikát tanítanak, a biológusok képzésétől a közgazdászokon át a felsőfokú pénzügyi szakemberek képzéséig.

Jelentősen eltér ezektől a matematikusok képzése. (Most nem különböztetem meg az alkalmazott és az elméleti matematikusképzést, bár Magyarországon vannak eltérések a két forma között, nem csak tananyagban, de didaktikai szempontból is.) Itt is igen nagy hangsúlyt kap a konkrét matematikai tartalmak tanítása, de ezen keresztül a leendő matematikusok a matematikán belüli összefüggéseket, az érvényes gondolkozási technikák jelentős részét, és végső soron a matematika egész paradigma-rendszerét elsajátítják.

A matematikusokétól is eltér a leendő pedagógusok matematikai képzése. Esetükben jóval kevesebb a tanított matematika mennyisége, és a leendő tanároknak tanított anyag szintén nagyon eltér a leendő tanítóknak tanítottól. A pedagógusok matematikai képzésének céljai közül a legfontosabbak:

- konkrét matematikai tartalmak elsajátítása;
- a hallgatók matematikai érzékenységének fejlesztése;
- a bizonyítási igény fejlesztése;
- a probléma-érzékenység fejlesztése;
- a (matematikai) fogalmak kialakítási technikájának elsajátítása (elsősorban konkrét tartalmakon keresztül);
- a fogalmi tisztaság iránti igény kialakítása, fejlesztése;
- a pontos fogalmazás technikájának elsajátítása;
- a megértett matematika mások – az anyagot még nem értők – számára felfogható módon való megfogalmazásának elsajátítása.

Mindezeket elsősorban konkrét matematika anyagok elsajátíttatásán keresztül alakítjuk ki, fejlesztjük.

Életkori sajátosságok

Természetszerűleg mások az életkori sajátosságai a közoktatásban részt vevőknek, mint a felsőoktatás tanulóinak. (A közoktatás felnőttképzésétől most eltekintünk.)

Míg a közoktatásban lényegében gyerekek vesznek részt – akiknek életkori sajátosságai folyamatosan változnak, de ez egyrészt igen alaposan vizsgált téma, másrészt ennek az előadásnak nem tárgya –, addig a felsőoktatásban felnőttek.

Ez az oktatottak számos, a matematika tanítás-tanulás folyamatában szerepet játszó tulajdonságát meghatározzák. Bár igen komoly egyéni különbségek vannak, de azért átlagosan jelentős eltérések vannak a gyerekekéhez képest. Most az alábbi tulajdonságokat emelném ki:

- a motorikus készségek kialakultak;
- fejlett szövegértés;
- kialakultabb bizonyítási igény;
- magasabb fokú absztrakciós készség;
- nagyobb monotonitás-tűrés;

- nagyobb céltudatosság;
- nagyobb intellektuális érdeklődés és érzékenység;
- nagyobb belső motiváltság;
- jobb fogalmazási képesség;
- nagyobb felelősség-tudat;
- kisebb tekintély-tisztelet.

Mindezek alapján nem meglepő, hogy a felsőoktatásban alkalmazott didaktikai módszerekre más jellemző, mint a közoktatásban alkalmazottakra.

Alapvető eltérés, hogy míg a közoktatásban változatos didaktikai módszereket alkalmazunk, addig a felsőfokú matematikaoktatás eléggé egysíkú.

Ennek egyik oka, hogy a felsőfokú matematikát oktatók igen jelentős hányada semmiféle didaktikai képzésben nem részesült, és ilyen irányú tanulmányokat egyénileg sem folytatott! (Nem véletlen, hogy a tanító- és tanárképzésben, ahol az oktatók nagyobb százalékban rendelkeznek tanári végzettséggel is, sokkal változatosabb és tudatosabb matematikaoktatás folyik.)

De nem ez az egyetlen ok.

Magyarországon a felsőfokú matematikaoktatás legjellemzőbb formája a frontális, az anyagot direktben közlő, a vizsgákon az anyagot (ha lehet megértve ugyan, de) lényegében változtatás nélkül visszakérdező tanítás. (Ez a világ más egyetemein koránt sincs mindenütt így!)

Tehát általában szó sincs az érdeklődés felkeltéséről, a motiválásról, a változatos anyagközlésről – az elterjedőben lévő vetített diák alapján történő matematika órákat aligha tekinthetjük lényeges változásnak, sőt, mechanikusabbá, merevebbé teszi az előadást –, és nincs nagy szerepe a felfedeztetésen alapuló matematikaoktatásnak sem. Minimális a differenciált, nívó- vagy heterogén csoportos oktatás szerepe is. Nagyobb mértékben érvényesül azonban a didaktikai alapelvek közül a tudományosság alapelve.

Megítélésem szerint a helyzet lehetne sokkal jobb, de – néhány kivételtől eltekintve – nem tragikus. És meglehetősen szükségszerű.

A helyzet általában nem tragikus: Minthogy az átadandó információ mennyisége igen nagy és a képzésben részt vevők száma is általában magas, ezért célszerűen alakult ki, hogy frontális előadásokon adjuk át a matematikai ismeretek döntő többségét. Ennek átvételére a hallgatók általában alkalmasak is, mivel

- a nagyobb belső motiváltság (szakválasztás) miatt kevesebb időt, energiát kell fordítani az érdeklődés felkeltésére, megtartására;
- a nagyobb monotonitás-tűrés miatt a hallgatók képesek az előadásokat végigülni;
- a fejlett motorikus készségek miatt a hallgatók képesek az előadások anyagát jegyzetelni;
- a magasabb fokú absztrakciós készség miatt a hallgatók képesek a matematikai fogalmak, összefüggések reprezentációját magukban elkészíteni. (Vagy sem.)
- A helyzet szükségszerű. Hiszen – mint utaltam rá – az oktatók jelentős része nem is tud egyéb oktatási formákról, vagy ha mégis hallott róluk, nincs bennük gyakorlata, és nem is érzi azok alkalmazását szükségesnek. A frontális oktatás az oktatók számára is(?) kényelmesebb, kevesebb munkát igénylő, mint a változatos,

netán differenciált oktatás. A jelenlegi igen alacsony fizetés/oktatási-terhelés hányadosnál érthető a minimális energiára törekvés.

A helyzet elsősorban a tanárképzésben lehet tragikus, bár itt sem elsősorban a frontális oktatás miatt. Hanem azért, mert ez az oktatási forma magában hordozza azt a veszélyt, hogy a leendő pedagógusok a szakmai tárgyak hallgatása során csak kevés, és első sorban „matematikusi" matematikai gondolkozásmódokkal, reprezentációkkal találkoznak. Így kevés matematika-képet ismernek csak meg, és a tanítási gyakorlatukban a gyerekeknek az általuk ismerttől eltérő gondolkozásmódjával nem tudnak mit kezdeni. Ugyancsak veszélyforrás, ha a képzésük során nem találkoznak megfelelő mennyiségű példával arra, hogy az oktatót érdekli, hogy ők hogyan gondolkoznak – netán hogyan gondolkoznak másként –, és a gondolatmenetüket tudja is, hajlandó is követni. Ugyanis a tanításban nélkülözhetetlen empatikus készségüket – az egyéni adottságokon túl – elsősorban személyes példával, gyakorlattal lehet fejleszteni.

Irodalomjegyzék

Ambrus András (1995): *Bevezetés a matematikadidaktikába [egyetemi jegyzet]* Eötvös kiadó.

Szendrei J. – Korándi J.– Ambrus A. (2007): La formazione degli insegnanti di matematica in Ungheria. *Bollettino U.M.I. La Matematica nella Societa e nella Cultura*, Serie VIII, **X-A** 563–584.

KONFLIKTUSOK A VALÓSZÍNŰSÉGFOGALOM KIALAKÍTÁSA KAPCSÁN

Vancsó Ödön – Szitányi Judit

ELTE TTK – ELTE TÓK

Az előadás központi kérdése, hogy az első hat évfolyam gazdag valószínűség-számítási előkészülete játékok és kísérletek formájában, és az elültetett fogalomcsírák miért nem érnek össze a középiskolai valószínűség fogalommal, miért nem nyújtanak elégséges alapot, mint más matematikai témák esetében. Miként jön létre egy nem kívánatos szakadék a két szint között? Annak ellenére, hogy idehaza Varga Tamás és munkatársainak nemzetközileg is elismert munkássága nyomán az iskolai matematikában a véletlen elég korán és didaktikailag átgondoltan megjelenik. A fogalomépítkezés a valószínűség esetében elég nehéz – ami oka lehet a vizsgált jelenségnek –, amit konkrétan meg is mutatunk majd az előadásban, hasonlóképpen a valószínűség különböző gyökereit (statisztikai, logikai, szubjektív), és ezek kapcsolatait. Mindezeket a valószínűség, mint speciális absztrakt mérték kapcsolja össze. Egy fogalmi vezérfonal a (mérhető) statisztikai- (relatív gyakoriság) és a (számítható) klasszikus- valószínűség kapcsolatának követése lehetne. Ezzel a nagy számok törvényének a jelentősége is hangsúlyossá válna. A téma kutatásához bizonyos empirikus tapasztalatok és adatok már rendelkezésünkre állnak a közoktatásból, valamint a tanító és tanárképzésből. Az előadás célja közös kutatás elindítására és komolyabb didaktikai együttműködésre ösztönözni mind a két korosztályt tanítókat, mind az őket képző felsőoktatási intézményekben oktatókat, kutatókat. Ezt az együttműködést elősegítheti a most zajló „Geomatech" projekt, ahol egy módszertani csoportban dolgozik a két előadó.

A valószínűségfogalom igen összetett, három alapvetően különböző irányú megközelítése lehetséges:

a) Intuitív módon, érzésekre hagyatkozva.

A valószínűség fogalmának alakítása az oktatás során nem pusztán matematikai probléma. Fontos tényező a valószínűséggel kapcsolatos szubjektív érzés, melyet *szubjektív valószínűség*nek, valószínűség-érzetnek stb. nevezhetünk. Tversky és Kahneman (2002) elmélete alapján a szubjektív valószínűség annak a belső magabiztosságnak a mértéke, amely egy jövőbeli esemény bekövetkezéséhez kapcsolódik.

A valószínűségszámítás tanulásának folyamata során a fogalomalkotás minden fázisában jelen vannak a szubjektív tényezők is (Szitányi 2012), ettől a ténytől a tanításban sem lehet eltekinteni.

A szubjektív valószínűség fogalmának még a Bayes-statisztikában lesz fontos szerepe, ahol egyébként korrektül megalapozzák. Lásd Wickmann (2000), valamint Vancsó (2009a)

b) A valószínűség statisztikai – relatív gyakoriságokkal történő – megközelítésével.

Tekintsünk egy véletlen jelenséget és vele kapcsolatban egy *A* eseményt. Végezzünk a véletlen jelenséggel kapcsolatban *n* darab kísérletet. Ezen kísérletsorozat során az *A* esemény n_A -szor bekövetkezik, ekkor az $\frac{n_A}{n}$ hányadost, mely azt mutatja, hogy a kísérletek hányad részében következett be az *A* esemény, az esemény relatív gyakoriságának nevezik. Mivel $\frac{n_A}{n}$ a véletlentől függ, így a relatív gyakoriság is véletlentől függ. A valószínűség – a statisztikus tárgyalásmódban – a relatív gyakoriság bizonyos fajta absztrakciójaként kialakított számérték. Sok kísérlet során ez a hányados „stabilizálódik" (aminek a hátterében a nagy számok törvénye áll) 0 és 1 között. A számot, ami körül stabilizálódik a relatív gyakoriság, nevezzük (statisztikai) valószínűségnek. A valószínűségszámítás erre alapozott felépítésével R. von Mises foglalkozott sokat a XX. század elején pl. Mises (1931).

A hazai általános iskolákban 1963-ban kezdődött meg a komplex matematikatanítási kísérlet, melyet Varga Tamás irányított. Ő és munkatársai is kiemelt jelentőséget tulajdonítottak ennek a témakörnek. A komplex matematikatanítási kísérlet alapgondolata, hogy „kisgyerekkortól kezdve is lehet igazi matematikát tanítani. Sőt: kisgyerekkortól kezdve érdemes igazi matematikát tanítani. (Varga 1971)" A komplex kísérlet szerves részét képezték a valószínűségi játékok és kísérletek az általános iskolákban. Ez a témakör a komplex matematikatanítási kísérlet hatására 1978-ban került a magyar közoktatás anyagába. Ebben a kísérletben Szendrei Julianna is Varga Tamás munkatársa volt.

Magyarországon az iskolai feldolgozás során a valószínűség fogalma és a relatív gyakoriság fogalma szorosan összekapcsolódik. A alapozó szakasz tevékenységei, a játékok, a kísérletek egyik célja, hogy tapasztalatot nyújtson egy esemény bekövetkezésének relatív gyakoriságáról, ezáltal „szemléletes képet" adjon az esélyéről.

c) A valószínűség valamilyen elméleti értékének kiszámításával.

A valószínűségszámítás tanulása során hamar megjelennek azok a szituációk, amikor egy eseményhez rendelt számértéket (az esemény valószínűségét) úgy határozzuk meg, hogy nem csak a relatív gyakorisággal dolgozunk. Az alapgondolat a Laplace-tól származó klasszikus (kombinatorikus) valószínűség, amely a kedvező és az összes lehetséges összeszámlálása után ezek hányadosaként határozza meg a valószínűséget.

A valószínűség fogalmának középiskolai bevezetésére nem alkalmazhatjuk az axiomatikus tárgyalásmódot (Kolmogorov 1932), amely a matematika tudományában megalapozta ezt a területet, hiszen az axiomatizálás egyik fázisban sem igazodik a tanulók életkori sajátosságaihoz (kivéve az emelt szinten matematikát tanulókat).

A valószínűséget megkísérlik definiálni a relatív gyakoriság fogalmának segítségével. Például egy hetedik osztályos tankönyvi meghatározás: „Adott *A* esemény valószínűségének azt a számot tekintjük, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik. Az *A* esemény

valószínűségének jele: $\mathbf{P}(A)$" (Jakab et al. 2011) Megjegyzés: Ebben a definícióban az „ingadozik" szó jelentése alapfogalomként szerepel.

Még egyetemi hallgatók is gyakran tévesztik össze a két hányadost (relatív gyakoriság és a „kedvező per összes" klasszikus valószínűséget). Tulajdonképpen a valószínűség ezen definícióinak „egyenértékűsége", mindegyik a nagy számok törvényének leegyszerűsítése. A valószínűségszámítás axiomatikus felépítése egy későbbi fejezet. A tanítás módszerei itt nem deduktívak, hanem inkább a természettudományban alkalmazott megfigyeléseken alapuló induktív módszerekhez hasonlatosak. Számos matematikus, aki tankönyvírásra vállalkozott, csak nehezen birkózik meg ezzel a kompromisszummal. Azt, hogy a relatív gyakoriság valóban egy bizonyos érték körül ingadozik, ebben a szakaszban csak a tapasztalat alapján fogadjuk el.

A fentiekből is látszik, hogy a fogalomépítkezés a valószínűség esetében elég nehéz. Mindezeket a valószínűség, mint speciális absztrakt mérték kapcsolja össze. Egy fogalmi vezérfonal a (mérhető) statisztikai- (relatív gyakoriság) és a (számítható) klasszikus- valószínűség kapcsolatának követése lehetne. Ezzel a nagy számok törvényének a jelentősége is hangsúlyossá válna. Azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a valószínűségszámítás eredményes tanításának alapvető kérdése a valószínűség megadásához választható modellek ismerete és ezek eltéréseinek tudatosítása.

A három forrás – a szubjektív, a statisztikai és a klasszikus valószínűség – egyszerre jelenik meg a következő gyakorlati szituációban. Egy ritka betegséget tesztelnek (pl. HIV-vírus). A tesztnek két hibája is van, bizonyos egészséges (nem fertőzött) emberek esetén is mutat hamisan pozitív eredményt (ami nem jó, de kevésbé nagy baj, mint a fertőzöttség esetén előforduló hamis negatív eredmény (ezt próbálják minimalizálni, mivel a lényeg a szűrés, így nagy baj, ha fertőzött nem pozitív eredményt kap). Ezek után tegyük fel, hogy pozitív lett a tesztem. Vajon mekkora eséllyel vagyok valóban fertőzött? A fertőzöttség teszt előtti esélyének becslése szubjektív valószínűség, saját ismereteimtől, előéletemtől függ. A teszt hibáit próbákkal ellenőrzik, ez statisztikai valószínűség, míg az esélyemet – pozitív eredmény esetén – a „kedvező per összes" formulával, azaz a klasszikus valószínűséggel számoljuk. Lásd részletesebben Vancsó (2004), illetve Vancsó (2009b). Ennek a szituációnak a fogalmi elemzése a középiskolában egy jó lehetőség lenne a gyökerek tisztázására. A matematikát tanítók azonban minden évfolyamon nehezen találják meg a kapcsolatot az előkészítő tevékenységek és a valószínűség számítása között.

Az alsóbb évfolyamokban tanítók sokszor egyszerűen a téma mellőzése mellett döntenek. Ezt a témakör tanításával kapcsolatos számos sajátosság magyarázza:

- Alsóbb osztályokban a valószínűségi kísérletek legtöbbször játékok keretén belül valósulhatnak meg. A játék során nincs mérhető produktum, nehéz nyomon követni az egyes gyerekek fejében alakuló fogalmakat, ezért sokan időpocsékolásnak tekintik, ráadásul attól tartanak, hogy a „fegyelem" fellazul az órán.
- Nem kapcsolódik ehhez a témakörhöz olyan részletes értékelési rendszer, mint például az alapműveletek tanításához. Mivel az értékelés alapja ebben az időszakban és témakörben ezért csak a tanulók megfigyelése, sok pedagógus számára jó ürügyet jelent a téma mellőzésére.

- A valószínűséggel kapcsolatos játékok, kísérletek sokszor időigényes tevékenységek, melyek a gondolkodásra gyakorolt közvetlen hatását nem látják előre a tanítók, tanárok. Az idő hiányával való érvelés igen gyakori a játékok mellőzésére.
- Nehezen érthető, hogy milyen fontos szerepe van azoknak a feladatoknak, melyek megoldásához nem tudunk elméleti modellt állítani. Tehát kimaradtak olyanok, mint rajzszögek dobálása, hamis kocka készítése, stb.
- A valószínűségi játékokban és kísérletekben rejlő bizonytalanság sok esetben elrettenti a pedagógusokat attól, hogy előre nem látható, legfeljebb csak elég jól megsejthető kimenetelű kísérletekbe bonyolódjanak. Pedig ha egy kísérlet nem a várt eredményt hozza, az is szerves része a matematikai tapasztalásnak. (Szendrei – Szitányi 2007)

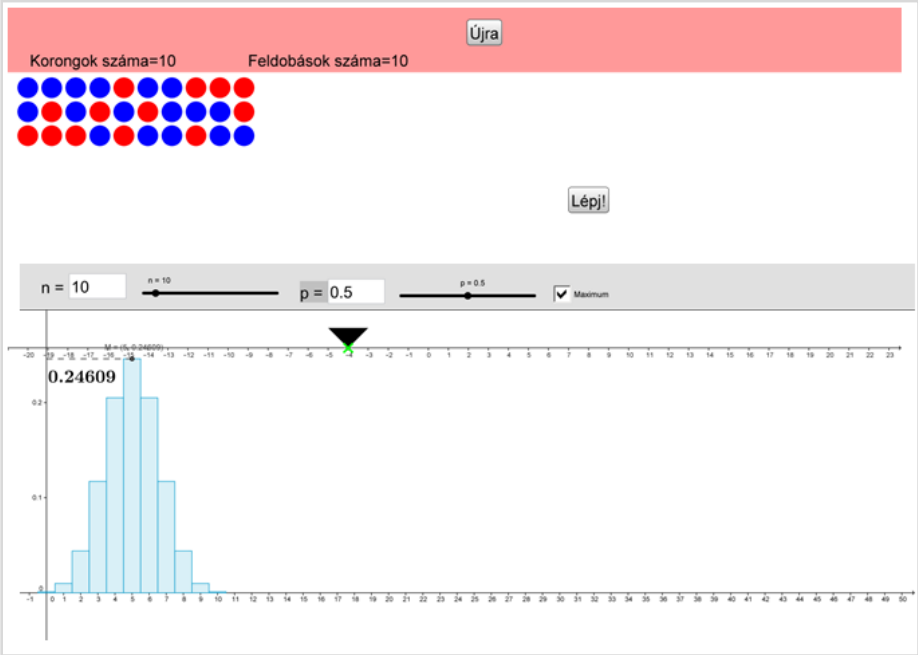
A középiskolában tanítók ezzel szemben a valószínűség elméleti értékének számítását preferálják. A feldolgozás során itt is találkozhatunk anomáliákkal.

- Számukra sem minden esetben világos, hogy az előkészítő tevékenységeknek milyen szerepe van a téma feldolgozása során.
- Nem válik hangsúlyossá (sőt legtöbbször elmarad) annak vizsgálata, hogy a valószínűség fogalmának különböző értelmezéseiből következően egy esemény valószínűségének meghatározásához több lehetőség kínálkozik.
- A kombinatorikus meggondolásokkal megoldható feladatok mellett igen kis számban jelennek meg olyan problémák, melyek a valószínűség másfajta kiszámítását kérik. (Például geometriai valószínűség)
- A középiskolai órakeret sok esetben nem teszi lehetővé, hogy olyan problémák is feldolgozásra kerüljenek, ahol a valószínűség elméleti értéke nem számítható, kísérletek szükségesek, illetve azt, hogy egy-egy probléma elméleti modelljének érvényességét statisztikai szimuláció eredményeként kapott értékekkel ellenőrizzék.

A fent vázolt problémák miatt véljük úgy, hogy a közoktatásban szükséges a valószínűség fogalomépítési fázisait tudatosabban kezelni. Megoldást jelenthet, ha olyan problémákat is feldolgozunk, melyek több évfolyamon is átívelnek. Úgy véljük, hogy a valószínűségi kísérletekre a közoktatás minden szintjén szükség van. Számolnunk kell azonban azzal a ténnyel, hogy jelenleg a matematika tanterv órakerete szűkös, túl sok tényleges kísérlet elvégzésére nincs idő.

Ezeket a tényeket vettük figyelembe a most zajló „Geomatech" projektben, ahol ugyanabban módszertani csoportban dolgozik a két szerző. Célul tűztük ki, hogy évfolyamokon átívelő valószínűségi problémákat dolgozzunk fel számítógépes szimuláció segítségével. Ezek közül szeretnénk bemutatni egyet.

Például: A kiinduló problémában páronként 10 koronggal játszanak a gyerekek. A korongok feldobása után annyit lépnek a számegyenes pozitív irányába, amennyi piros korong esett az asztalra, és annyit a negatív irányba, amennyi kék! Megfigyelik, hogy a 10. dobás után hová érkezhet a bábu.



1. ábra: Számítógépes szimuláció a geomatech projektben

Folytatása a középiskolában a visszatevéses mintavétel tananyagegysége, ahol egy kalapból húzunk pl. ötször a kihúzott golyót mindig visszatéve, ismerve a piros és az összes golyók arányát. (Megjegyezzük, hogy a visszatevés nélküli esetet is kidolgozzuk valamint összevetését a visszatevéses esettel.) Vajon hány pirosat fogunk húzni? Először szimulációval bemutatjuk a szituációt, majd néhány száz kísérlet eredményét szemléltetjük egy gyakorisági diagrammal. A tapasztalatok összegzése után – amit már egy középiskolás (szemben egy kisebb korú gyermekkel) maga nem csinálna végig –, oszlopdiagramon az egyes relatív előfordulásokat ábrázoljuk, majd összevetjük a modell alapján a klasszikus valószínűség fogalmát felhasználó elméleti eredménnyel, ami a nagy számok törvényének is egy egyszerű interaktív illusztrációja. Ebben fontos lesz a golyók számozása is, amivel a kombinatorikai modell számítását lehet indokolni. Ez a modell binomiális eloszláshoz vezet. A binomiális eloszlás értékeit egyetlen diagramon a kapott relatív gyakoriságokkal együtt mutatja be a Geogebra segédanyagunk.

A témára az iskolai kísérletek lefutása után visszatérünk majd, hogy megosszuk a remélhetően pozitív tapasztalatokat.

Irodalomjegyzék

Fazekas, István – Tómács, Tibor (1996): *A valószínűségszámítás szemléletes oktatásáról,* A matematika tanítása, 1996. szeptember (8 – 11)

Hawkins, A. S. – Kapadia, R. (1984): *Children'sconceptions of probability. – A psychological and pedagogical review,* EducationalStudiesinMathematics, 1984. 15.

Jakab Tamás, Kosztolányi József, Pintér Klára, Vincze István (2011): Sokszínű matematika 7., Mozaik Kiadó, Szeged

Kahneman, D. – Tversky A. (2002): *Belief in the law of smallnumbers. InJudgmemen under uncertainty. Heuristics and biases*, Cambridge University Press., Cambridge

Szendrei Julianna – Szitányi Judit (2007): *Intereses y sentimientos¿Quédificultadestiene el desarrolo de la mentalizaciónhacia las probabilidades en la escuelaprimaria?,*Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, Probabilidades, 31–46. Barcelona

Szitányi Judit (2012): *A valószínűségi gondolkodás sajátosságai*, doktori értekezés, Debrecen

Vancsó Ödön (2004): Inverse probabilities in everyday situations (Bayesian-type problems) *accepted paper* ICME-10, in TSG-11 2004 www.icme-10.dk

Vancsó Ödön (2009a): Parallel discussion of classical and Bayesian ways as Introduction to statistical inference. In: *IEJME* Vol. 4. No. 3 October 2009. www.iejme.com

Vancsó Ödön (2009b): A matematikai modellezés nehézségei egy OKTV feladat kapcsán, *Matematika Tanítása* 2009 4, 30–34.

von Mises, R. (1931): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Deuticke, Leipzig und Wienna

Wickmann, D. (2000): *Bayes-statisztika*, Eötvös Kiadó, Budapest

Varga Tamás (1971): *Nemzetközi matematikaoktatási tanfolyam Budapesten*, Kapcsolat 1971. júliusi száma, OPI, Budapest

Varga Tamás (1973): *A valószínűségszámítás tanítása*, Kapcsolat 1973. májusi száma, OPI, Budapest

ÉLMÉNYKÖZPONTÚSÁG, FACILITÁCIÓ ÉS KOOPERATÍV MÓDSZEREK A MATEMATIKATANULÁSBAN

AZ ÉLMÉNYMŰHELY MATEMATIKAI-MŰVÉSZETI MOZGALOM

Szabó Ildikó – Fenyvesi Kristóf – Stettner Eleonóra

ANK, Pécs – Jyväskyläi Egyetem, Finnország – Kaposvári Egyetem

Az ÉlményMűhely – Nemzetközi Mozgalom az Élményközpontú Matematika-oktatásért 2008-ban indult útjára nemzetközi elismertségnek örvendő tudósok, művészek és pedagógusok összefogásával. Célunk a matematikai és a művészeti oktatás összekapcsolható jó gyakorlatainak kutatása és fejlesztése és ezáltal az élményközpontú matematikatanulás új formáinak a kialakítása. Gyakorlati tevékenységen alapuló és kooperatív tanulási formákat előtérbe helyező, kísérletező és alkotó műhely jellegű tanórákkal és iskolán kívüli foglalkozásokkal hívjuk fel a figyelmet a matematikai gondolkodás és látásmód kulturális beágyazottságára. Tevékenységünk sikerének egyik kulcsa a hagyományos, statikus tanári szerepkör lebontása és a partnerségen, az együttműködés radikális formáin alapuló facilitátori szemlélet matematikapedagógiai megalapozása. Fontosnak tartjuk, hogy az ÉlményMűhely szellemiségét, jó gyakorlatait a tanárok és a tanár szakos hallgatók mélyebben is megismerhessék. Ennek érdekében több nemzetközi oktatási projektben is részt veszünk, illetve számos hazai felsőoktatási intézménnyel működünk együtt. A Kaposvári Egyetemen a Matematika és művészet című szabadon választható tantárgyunk egyaránt szól nappali és levelező tagozatos hallgatóknak. Az előadás második részében az oktatás során szerzett tapasztalatokról is beszámolunk.

1. A „matematikai örömök” továbbadása: Szendrei Julianna öröksége az ÉlményMűhelynek

2008 szeptemberében, az ÉlményMűhely közösségének megszületésekor a pécsi Apáczai Nevelési Központban ott voltak velünk Szendrei Julianna és Klein Sándor is,[27]

[27] A hagyomány- és közösségteremtő programot Erdély Dániel, Fenyvesi Kristóf és Szabó Ildikó szervezték. Szendrei Juliannán és Klein Sándoron kívül Lénárt István, Saxon Szász János és Dárdai Zsuzsa, Stettner Eleonóra és Szilassi Lajos működtek közre műhelyvezetőként és előadóként.

akik Varga Tamás mellett dolgozva a komplex matematikatanítás elterjesztésében, s ezáltal a magyarországi matematika-pedagógia korszakos megújításában is kulcsszerepet vállaltak annak idején. Míg Szendrei Julianna alsó és felső tagozatos tanároknak tartott kis csoportos műhelyfoglalkozást, addig Klein Sándor az ÉlményMűhelyen résztvevő csaknem kétszáz 6–12 éves gyerekkel kezdeményezett közvetlen beszélgetést. Mind a két esemény máig emlékezetes, tanulságos élmény volt. Míg a jobbára gondterhelten ülő, magukbaroskadt pedagógusokat Szendrei Julianna híresen találékony és szellemes dialogikus módszere is alig tudta kizökkenteni fásultságukból, addig Klein Sándor egyszerűségükben is megkapó, rogersiánus[28] kérdései és karizmatikus derűje pillanatok alatt sokszólamú párbeszédbe vonta az előzőleg az ÉlményMűhely kreatív foglalkozásain már fellelkesült több száz fős gyerektömeg minden egyes tagját.

1. ábra: Szendrei Julianna Térbeli építések – geometriai fogalmak című pedagógusműhelye a 2008 szeptemberében a pécsi ANK-ban rendezett legelső ÉlményMűhelyen (Fotó: Csizmadia Sándor)

Szendrei Julianna műhelyén a pedagógusok kezdeti döbbenetét az okozta, hogy a foglalkozás ugyan a ***Térbeli építések – geometriai fogalmak*** címet viselte, azonban már rögtön az első pillanatban világossá vált, hogy sem építőkocka, sem pedig egyéb térbeli modellező készlet nem fog előkerülni. Szendrei Julianna ehelyett papírt és ceruzát adott a résztvevőknek és apró kérdésekből kezdett el fokozatosan építkezni. Hogyan definiáljuk az egyenes, a szakasz, az egyes síkidomok és bizonyos térbeli alakzatok fogalmát a geometriában? A már-már banálisnak ható kérdések eleinte megrökönyödést keltettek

[28] Lásd Carl Rogers humanisztikus pszichológus pedagógiai tárgyú írásait.

a tárgyukban járatos matematika tanárok körében. Talán a pedagógusok szokatlan és kényelmetlen vizsgahelyzetben érezhették magukat, mivel a kérdésekre adható „helyes" válaszok a mindenki által kívülről fújt, a tanórákon untig ismételt definíciók voltak? Azonban amikor Szendrei Julianna következő kérdései immár arra vonatkoztak, hogy miként definiálhatnánk mindezeket az alapfogalmakat matematikai fogalmakra való hivatkozás nélkül, akkor a tanárok számára sejleni kezdett, hogy vajon mire megy ki ez a zavarba ejtő játék... Szendrei Julianna nem mondta ki és nem is foglalta össze „tanárosan", de mindenki számára egyre világosabbá vált, hogy arról van szó, hogy miként lehet a gyerekek intenzív érzésekkel és színes gondolatokkal teli világából hidat építeni a matematika egzakt és mérhető absztrakciókon alapuló világába? Miként lehet összeegyeztetni az élmények szabálytalan, állandóan változó kiterjedésű univerzumát a geometriai tér szigorú definíciókkal szabályozott végtelenségével? Miként lehet egy gyerekkel együtt matematikát tanulni úgy, hogy a tanár ne előzetes matematikai ismereteket és absztrakciókat feltételező fogalmakon alapozza meg és építse fel azokat a matematikai alapfogalmakat, amelyekre aztán teljes világosságukban és egyértelműségükben szüksége lesz az egyre bonyolultabb és egyre absztraktabb matematikai rendszerek kialakításában? Egyszerűbben fogalmazva: miként lehet matematikai ismereteket hatékonyan átadni valakinek, akinek egyáltalában nincs semmiféle ismerete, fogalma, képzete a matematikáról? Legegyszerűbben fogalmazva: hogyan beszéljünk matematikáról egy gyereknek?

A gondolkodás nélküli automatizmusokon, rutinszerűvé begyakorolt pedagógiai praxisokon és az untig ismételt definíciókon alapuló „tananyag leadásának" és „a lecke felmondásának" a világában ez az olyan magától értetődően megválaszolatlanul hagyott kérdés, azáltal, hogy Szendrei Julianna már-már nyomasztó következetességgel tette fel a tanároknak újra és újra, a rövid, alig 45 perces műhely végére hirtelen a problémák gyökerére és egy óriási kihívásra mutatott rá ott, ahol nem is sejtettük, hogy egyáltalán bármi probléma lehet... Nem az a jó tanár, aki minél több diákját tudja magolásra késztetni. Hanem az, aki képes nap mint nap, óráról-órára akár még Gödel (az axiómákat további axiómákra visszavezető) paradoxonát is feloldani, derült ki – akkor ki nem mondott formában – Szendrei Julianna műhelyének végére...

A napi munkában kimerült pedagógusok, mintha megrettentek volna attól, hogy Szendrei Julianna személyesen szólította meg őket. Ezzel szemben a gyerekeket személyesen játékba- és párbeszédbe vonó Klein Sándor felé, már rögtön a második kérdése után (1. Miért szerettek iskolába járni? 2. Miért nem szerettek iskolába járni?) már nem csak a terem minden zugából felröppenő válaszok, hanem egy neki mint beszélgető- és játszótársnak dobott valódi labda is repült, aminek Klein Sándor leleményesen egyből aktív szerepet is adott a beszélgetéshez való egyenlő hozzáférés és demokratikus keretek biztosításában.

2. ábra: Klein Sándor Rogers-beszélgetése 200 gyerekkel a 2008 szeptemberében a pécsi ANK-ban rendezett legelső ÉlményMűhelyen (Fotók: Csizmadia Sándor)

Hogyan dobhatjuk a gyerekeknek és hogyan kaphatjuk el a gyerekek által nekünk dobott labdát? Hogyan adhatjuk tovább és hogyan fogadhatjuk be újra a „matematikai örömöket"? – kérdezzük azóta is. „Sajnos jóval kevesebb lehetőségük van azoknak, akik nem a versenyszintű feladatmegoldást kedvelik. [...] A »matematikai örömökhöz való juttatás« terén kevesebb szervezett lehetőség van"[29] - írta Szendrei Julianna a *Gondolod, hogy egyre megy?* című könyvében. 2008 szeptemberétől kezdve Vele, mára pedig immár a csaknem 200 tagot számláló ÉlményMűhely közösség többi szakemberével együtt abban bíztunk és bízunk, hogy az ÉlményMűhely egy ilyen lehetőség. Ha a matematikától közvetlen út vezet a párbeszédig és játékig és vissza, ahogy azt Szendrei Julianna is tanította, akkor ugyancsak közvetlen, a matematikától és a matematikához vezető közvetlen útnak kell tekintsük a párbeszéd és a játék kivételes formáit is: a kreatív alkotást és a művészetet.

2. Az ÉlményMűhely Nemzetközi Mozgalom az Élményközpontú Matematika-oktatásért

Az ÉlményMűhely – Nemzetközi Mozgalom az Élményközpontú Matematika-oktatásért (www.elmenymuhely.hu) nemzetközi szakembereket, szülőket, diákokat és oktatási, kulturális intézményeket, civil kezdeményezéseket összekapcsoló hálózata 2008-ban jött létre a magyarországi Ars GEometrica művészet- és tudományközi konferenciasorozat nemzetközi elismertségnek örvendő tudósai, művészei és pedagógusai összefogásával.[30]

---

[29] Szendrei Julianna: *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex, 2005, 437.

[30] Az ÉlményMűhely munkájának koordinátorai jelen cikk szerzői: dr. Fenyvesi Kristóf, a Jyväskyläi Egyetem kutatója (Finnország), a világ legnagyobb művészeti-matematikai közösségét összefogó Bridges Organization (USA; http://www.bridgesmathart.org/) közösségi rendezvényeinek igazgatója és a szimmetria jelenségének tudomány- és művészetközi kutatóit összefogó Nemzetközi Szimmetria Egyesület (www.symmetry.hu) vezetője. Az ÉlményMűhely szakmai hálózatának pedagógiai koordinátora Szabó Ildikó, a pécsi ANK matematika-fizika szakos tanára, országosan elis-

Az ÉlményMűhely szakmai eseményeken, konferenciákon és önálló kiadványaiban[31] számol be eredményeiről. Az elmúlt időszakban megrendezett, országos érdeklődésnek örvendő ÉlményMűhely rendezvényeken több mint 20.000 általános és középiskolai tanuló, főiskolás, egyetemista diák, valamint több ezer pedagógus és közel ugyanannyi szülő vett részt. A Kutatók Éjszakája budapesti központi eseményein és regionális programjain rendszeresen a főszereplők között veszünk részt. Az ÉlményMűhely rendezvényei immár több ízben nagy sikert arattak Szlovákiában, Horvátországban, Szerbiában és Szlovéniában is, egyre több határon túli magyar és külföldi pedagógussal dolgozunk együtt. A közelmúltban Texasban (USA), az űrkutatás egyik legrangosabb nemzetközi eseményén[32], a belga Királyi Akadémián[33], a Towson Egyetemen, Baltimore-ban (USA)[34], mutathattuk be eredményeinket a nemzetközi szakmai közönségnek, 2014 nyarán pedig a világ legnagyobb matematikai kongresszusán, a négy évente megrendezett *International Congress of Mathematicians* művészeti-matematikai kísérőeseményén, a Bridges Seoul 2014 programjában is bemutatkozunk[35]. Tevékenységünket tudomány- és művészetoktatási szakemberek tanulmányozzák, nemzetközi tudományos kutatások épülnek az általunk alkalmazott koncepcióra (2012–2014-ben a nyolc európai egyetem által megvalósított „*Visuality & Mathematics: Experiential Education of Mathematics*" című Tempus projekt: http://vismath.ektf.hu/).

mert tehetségpedagógus. A közösség kutatási koordinátora pedig dr. Stettner Eleonóra, a Kaposvári Egyetem Matematika és Fizika Tanszékének vezetője, a matematika és művészet matematika-pedagógiai célú összekapcsolhatóságának kutatója.

[31] Kristóf Fenyvesi – Eleonóra Stettner szerk. *Hidak: matematikai kapcsolatok a művészetben, a tudományban és az élményközpontú oktatásban*. Kaposvári Egyetem, 2011.; Kristóf Fenyvesi – Slavik Jablan – Ljiljana Radovic szerk. *Vasarely és a matematika / The Vasarely Playhouse*. Janus Pannonius Múzeum, Pécs, 2011.; Kristóf Fenyvesi – Eleonóra Stettner et al. szerk.: *Experience-centered Approaches and Visuality in the Education of Mathematics and Natural Sciences / Élményközpontúság és vizualitás a matematika- és fizikaoktatásban / Dozivljaji I vizualnost u centru pozornosti u nastavi fizike matematike.* Kaposvár University, 2012.

[32] *43rd Lunar and Planetary Science Conference* (2012), The Woodlands, Texas. Internetcím: http://www.lpi.usra.edu/meetings/lpsc2012/pdf/2611.pdf

[33] *Math-Art Summit at the Royal Flemish Academy* (2012), Brüsszel. Internetcím: http://etopia.sintlucas.be/3.14/Wiskunst/Wiskunst_Brussels_2012.htm

[34] Bridges 2012 World Conference (2012), Towson Egyetem, Maryland. Internetcím: *http://bridgesmathart.org/bridges-2012/2012-speakers-coordinators/*

[35] Internetcím: http://bridgesmathart.org/bridges-2014/

3. ábra: Matematikai-művészeti ÉlményMűhely a Kutatók Éjszakája 2013 programjában a budapesti Európa Központban (balra, fotó: Dudás Szabolcs) és ÉlményMűhely Zometool óriásépítés a Budapesti Víz Világtalálkozó nemzetközi Ifjúsági Fórumának nyitányaként (jobbra, fotó: 4GFOTO)

Matematikai-művészeti gyűjteményünk, az ÉlményMűhely Utazó Galériája 2010-ben jött létre, a Bridges Matematikai-Művészeti Világkonferencia pécsi kiállításán bemutatkozó világhírű művészek és tudósok donációiból. A világ minden tájáról származó művészek és matematikusok munkáiból összeállított, csaknem 100 darabot felvonultató, folyamatosan bővülő gyűjteményünk az elmúlt évek során számos alkalommal szerepelt különböző közép-európai rendezvényeken. Gyűjteményünkre alapozva, 2011 szeptemberében egy állandó galériát is sikerült megalapítanunk az egri Eszterházy Károly Főiskola Természettudományi Karán (www.arsgeo.hu). Célunk további helyi egyetemi és főiskolai műhelygalériák alapítása, amelyekben a pedagógusképzés és a művészeti-tudományos menedzsment ismeretek oktatásának új formái is lehetővé válnak.

4. ábra: Az ÉlményMűhely Utazó Galériájának kiállítása az egri Esterházy Károly Főiskolának az ÉlményMűhely közreműködésével alapított Ars Geometrica Művészeti-Tudományos-Oktatási Galériájában. További információk: www.arsgeo.hu

3. Az ÉlményMűhely céljai és szemlélete

A matematikai és a művészeti oktatás jó gyakorlatainak az iskolai és az iskolán kívüli oktatási módszerekben történő összekapcsolása, népszerűsítése és tehetségpedagógiai alkalmazása terén kialakított koncepcióinkat arra az elgondolásra alapozzuk, hogy a jövő felnőtteinek új típusú készségekre, képességekre, tudásra lesz szükségük, amelyek kifejlesztéséhez új típusú oktatási megközelítések alkalmazására van szükség. Ez élményközpontú, az érzékszervek mindegyikét játékba hozó, ugyanakkor a szociális képességeket is fejlesztő, a tudomány és a művészet kapcsolódási pontjait felfedező pedagógiai gyakorlatok kidolgozását igényli, különös figyelemmel a tehetségek felfedezésére és gondozására –, de soha nem tévesztve szem elől az egyenlő hozzáférés és egyenlő esélyek elvét.[36] Az „elitoktatás" és a „tömegoktatás" koncepciói között zajló vitákban sajátosnak tűnő tehetségpedagógiai megközelítésünk szerint mindenki tehetséges valamiben.[37] A pedagógus, műhelyvezető, animátor, facilitátor elsődleges feladata, hogy a gyakran rejtőző, szunnyadó tehetséget felkutassa, s az érdeklődés komplex stimulálásával az egyéni tudás felépítéséhez és az egyedi, kivételes képességek kibontakozásához megfelelő környezetet biztosítson.

5. ábra: „A jövő felnőtteinek új típusú készségekre, képességekre, tudásra lesz szükségük" – a KockaKobak matematikaverseny győztesei a brüsszeli Atomium modelljét építik Zometoolból a számukra rendezett kreatív ÉlményMűhelyen.

[36] Az élményközpontú matematika-oktatás módszertani hátteréről bővebben, lásd: Fenyvesi Kristóf, The Experience Workshop MathArt Movement: Experience-centered Education of Mathematics through Arts, Sciences and Playful Activities, In: *Proceedings of Bridges 2012 World Conference*. Baltimore: Towson UP, 2012, 239–246.

[37] Vö. Ventegodt, S., Anderson, N.J., and Merrick, J., Quality of life philosophy VI. The concepts, *TheScientificWorldJOURNAL* 2003, 3, 1235.

4. A matematika és a művészetek szinergiája az ÉlményMűhelyben

Magas fokon technicizált világban élünk, amelynek szinte minden területén kiemelt szerephez jutnak mérnöki tudományok, a matematika (digitális kultúra, hálózatok, magas fokon szervezett és kontrollált rendszerek, stb.) és a művészeti-tudományos design. Elgondolkoztató, hogy mindeközben egy ezekkel a folyamatokkal ellentétes irányú tendenciaként a matematika és a természettudományok társadalmi megítélése folyamatosan romlik, az egyre szélesebb körben végzett attitűd-vizsgálatok világszerte negatív összképet mutatnak: elegendő, ha csak a 2012-es PISA felmérés keretében elvégzett matematikával kapcsolatos attitűdkutatás figyelmeztető eredményeire gondolunk.[38] Ezek a negatív tendenciák súlyosan veszélyeztetik a mérnök és természettudományos szakemberek utánpótlását, de azt is, hogy a jövő társadalmának tagjai képesek legyenek lépést tartani az egyre gyorsuló ütemű és egyre jelentősebb infrastruktúrát és társadalmi kooperációt követelő globális technológiai átalakulással.

Az oktatás egész rendszere, s a tanári szakma, a tanárképzés is komoly kihívásoknak néz elébe. Nem szabad megfeledkeznünk olyan maguktól értetődő, mégis talán meglepő szempontokról, hogy azok a tanár szakos hallgatók, akiket ma tanárnak képzünk, illetve a most pályakezdő pedagógusok 2040-ben is a legfiatalabb generációkat fogják tanítani. Számos olyan készségre van tehát szükségük, amelyekre csak folyamatos önképzéssel, egyéni és közösségi, sőt, a saját diákjaikat is a tudományos ismeretszerzés és ismeretterjesztés folyamatba bekapcsoló kutatói tevékenységgel és a tehetséggondozás nem kizáró, hanem befogadó, felkaroló formáinak a kialakításával tehetnek szert. Korunk iskolarendszerének és a benne tevékenykedő tanároknak nagy fokú flexibilitásra van szükségük ahhoz, hogy lépést tartsanak az állandóan változó társadalmi kihívásokkal és olyan tudáselemeket, képességeket és készségeket adhassanak át diákjaiknak, amelyek felnőtt korukban is alkalmassá teszik őket az ugyancsak gyorsan változó szakmai kihívások kezelésére. A jövő matematikusainak, mérnökeinek és természettudósainak nem elegendő csupán kivételesen jól képzett technikusoknak lenniük, ugyanakkor a társadalom egyetlen tagja sem elégedhet meg a tudáshoz és a technológiához való egyre növekvő szabad hozzáférés korában pusztán a „végfelhasználói" pozícióval. Magas fokú emberi érzékenység, humánum, művészi ambíciók és fantázia fogják a technológia innovatív megalkotóit, fejlesztőit és kreatív alkalmazóit a leginkább abban segíteni, hogy a lehető legmagasabb társadalmi/közösségi hatásfokkal kamatoztathassák egyéni tehetségüket (*6. ábra*). Mindezeket a szempontokat figyelembe véve tehetséggondozó programjaink a nemzetközi szakirodalomban a „STEM" (Science, Technology, Engineering, Mathematics) integrációjaként hivatkozott komplex gondolkodást az esztétikai, művészeti nevelés eszközeivel egészítik ki („STE-A-M": Science, Technology, Engineering, ART & Mathematics).[39]

---

[38] Lásd *PISA 2012 Results: Ready to Learn – Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs* (Vol. III), PISA, OECD Publishing, 2013.

[39] Vö. Harrell & Harrell, Strategies for Arts + Science + Technology Research: Executive Report on a Joint Meeting of the National Science Foundation and the National Endowment for the Arts, NSF

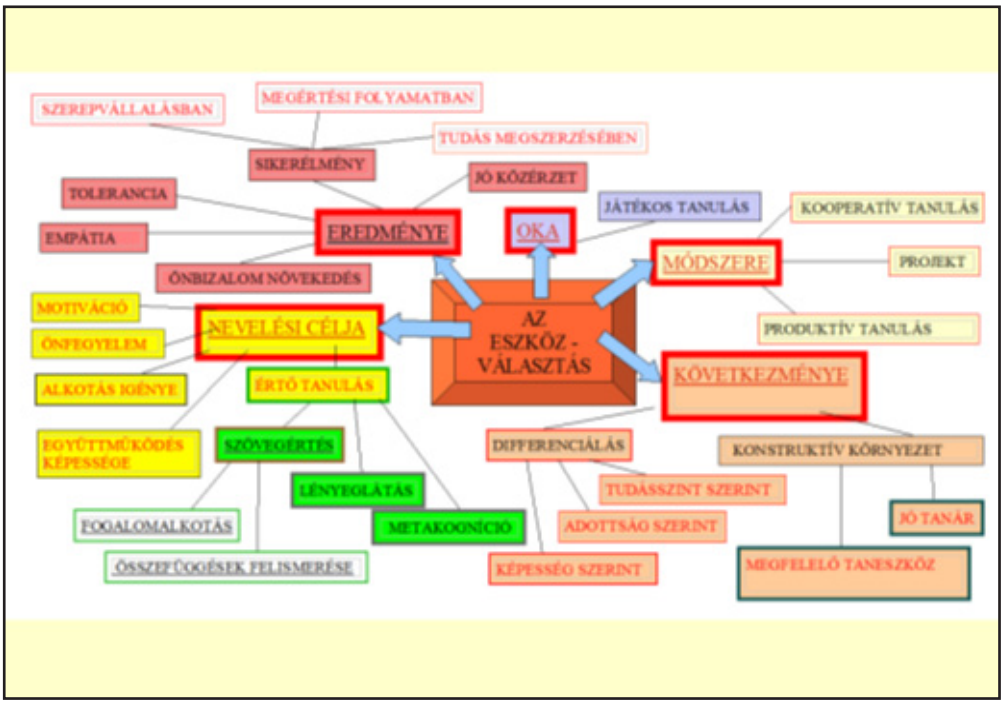
6. ábra: A hagyományos iskolai tanórákon alkalmazott pedagógiai eszköztár nem minden esetben elégséges a diákok természetes kreativitásának, az ismeretterületeket magától értetődően összekapcsoló, szabad asszociációs képességének a hatékony kiaknázására. Az egyes szaktárgyak merev elkülönítése, a tudásterületek elszigetelése sokszor a tanórai feladatokban is tükröződik. Gyakorló pedagógusként sok esetben csak kevéssé biztosítunk tudományközi átjárást a reál- és a humán diszciplínák között. Az ÉlményMűhely rendezvényei során viszont olyan eszközöket adunk a diákok kezébe és olyan feladatokat határozunk meg, amelyek segítségével az egymástól távolinak tűnő ismeretterületek, kulturális szférák közötti összefüggések, kapcsolódási pontok – mindenekelőtt a matematika kulturális beágyazottsága – egyéni és csoportos kutatásának, felfedezésének jut kiemelt szerep. Célunk, hogy minden diák lehetőséget kapjon a saját, egyéni kreativitásának érvényesítésére és képességei közösségi hasznosulásának a megtapasztalására.

5. Élményközpontúság, facilitáció és kooperáció az ÉlményMűhely foglalkozásain

Az ÉlményMűhely formális és informális oktatási keretek között megvalósított programjai során a tudományos és a művészeti oktatás összekapcsolhatóságának lehetőségeit kiaknázva olyan interaktív eszközöket, valamint felfedezés-, játék-, és alkotásközpontú pedagógiai módszereket alkalmazunk, amelyek révén a résztvevők matematikával

report, 2011.; Wallace et al., *Work in Progress – Building up STEAM – Exploring a Comprehensive Strategic Partnership between STEM and the Arts*. ASEE North Central Sectional Conference, 2010.; Dail, On Cultural Polymathy: How Visual Thinking, Culture, and Community Create a Platform for Progress, The STEAM Journal: Vol. 1: Iss. 1, 2013.; Henriksen, Full STEAM Ahead: Creativity in Excellent STEM Teaching Practices, *The STEAM Journal*: Vol. 1: Iss. 2, Article 15, 2014.; Madden et al., Rethinking STEM Education: An Interdisciplinary STEAM Curriculum. *Procedia Computer Science* 20, 2013, 541–546.

kapcsolatos attitűdjei pozitívan befolyásolhatók. A matematikai, természettudományos tárgyakban tehetségesnek számító diákok egyrészt új ismereteket szerezhetnek, meglévő tudásukat érdekes, művészet- és tudományközi irányokban kamatoztathatják, másrészt pedig az iskolai matematika- és/vagy természettudományos tárgyakban egyébként kevés sikerélményt tapasztaló diákok önbizalma növekszik, érdeklődésük fokozódik, a matematikai gondolkodás szépségére, a matematikai felfedezés izgalmára játékos, kreatív formában, közösségben végzett tevékenység során érezhetnek rá. A tanulási folyamatba bevont eszközeink számos módszertani innováció érvényesítésére adnak alkalmat, segítségükkel lebonthatók a frontális tanítás rutinjai: a csoportmunkát és a közösségben való tanulás új gyakorlatait[40] helyezik előtérbe (lásd *7. ábra*).



7. ábra: A tanári eszközválasztás pedagógiai kontextusa és következményei

Akárcsak informális keretek között szervezett műhelyeink esetében, iskolai foglalkozásaink optimális időtartama is 90 perc (egy „duplaóra"), de 45 perces, vagy több, egymást követő tanóra folyamán megvalósítható ÉlményMűhelyeket is tervezünk. Iskolai foglalkozásainkra, csakúgy mint iskolánkívüli rendezvényeinkre egyaránt érvényes az is, hogy a kiscsoportos munkát preferáljuk (maximum 10–15 fős csoportok

[40] Vö. Ferenc Arató: Towards a Complex Model of Cooperative Learning. *Da Investigação às Práticas,* 3(1), 57–79. [http://www.eselx.ipl.pt/cied/publicacoes/revista_atual/Ferenc%20Arato.pdf – letöltés ideje: 2014. 04. 11.]

további 3–5 fős alcsoportokra bontva), illetve nagyobb létszámú programok esetén (például óriásépítések) a diákok ugyancsak kisebb munkacsoportokban, egy-egy részfeladaton dolgozva teljesítik feladataikat. A csoportok összeállításánál, már az esemény előkészítése során külön figyelmet igyekszünk szentelni annak, hogy a programba bevont diákokból álló csoport – programunk többszintű, tudomány- és művészetközi komplex szemléletének is megfelelően – a tehetség-területek meghatározása szempontjából is heterogén legyen. A csoportban a matematikai, természettudományos tehetségek mellett helyet biztosítunk a humán területeken tehetséges diákoknak, valamint a művészeti tehetségeknek és a tehetségígéreteknek is. Ugyanakkor kulcsfontosságú szempontnak tartjuk, hogy a csoportban nem csak a már tehetségként felfedezett vagy tehetségesnek ígérkező diákok, hanem adott esetben tanulási nehézségekkel, magatartási zavarokkal küzdő diákok, valamint tanulmányi területekhez nem feltétlenül köthető területeken tehetségesnek számító diákok is helyet kapjanak. Elvünk: akárcsak a társadalomban, az iskolában és az iskolán kívüli közösségekben is mindenkire szükség van. Csak együtt, egy sokszínű, sokféle képességet egyesítő, heterogén csoport tagjainak hatékony kooperációjával hajthatjuk végre sikeresen a kitűzött feladatokat. Az örömteli műhelymunka közben a csoport minden tagja számára világossá válik az, hogy mindegyikük tehetséges valamiben. A program inkluzív, befogadó jellegének köszönhetően a csoportok a foglalkozás során, a foglalkozásvezető facilitátori munkája révén maguk is tudomány- és művészetközi kapcsolatok iránt fogékony „specialistákból" álló közösséggé formálódnak. Lesz akire az elméleti problémák megoldásában számíthatunk, mások a kézügyességükkel érvényesülnek, vannak akik az interneten találják meg az adott problémakör feltérképezéséhez éppen szükséges információt, és lesznek olyanok is, akikre pedig a műhelytevékenység alapos fotós/filmes dokumentációjában számíthatunk, stb. Mindazonáltal mindenki számára folyamatosan nyitva áll annak is a lehetősége, hogy új szerepben próbálja ki magát. Az ÉlményMűhely foglalkozásain megvalósított csoportmunka folyamán a tanulók matematikai, nyelvi-logikai, téri intelligencia, zenei intelligencia, finommotoros mozgás, kommunikációs és esztétikai területeken fejlődnek, illetve növekszik a kooperációs készségük.

A matematika és a művészet birodalma között kalandozva érzékszerveinkkel felfogható tapasztalatokat, élményeket szerzünk és osztunk meg egymással. Így a csoportnak felkínált új, vagy a tanítási órákon már elsajátított tudáselemeket felhasználó tevékenység során egy olyan tartomány feltérképezésére nyílik lehetőség, amelyben a különféle jelenségek tanulmányozása tudományos felismerésekre késztet, a tudományos tartalom megértése pedig kreatív, művészi inspiráció forrásává válik. Foglalkozásaink egy-egy tematika köré szerveződnek. A tematika középpontjában egy-egy problémakör több szempontú megközelítése, tudományos megismerése és kreatív művészeti feldolgozása áll. A foglalkozásokon, a tematika kapcsán felmerülő matematikai, természettudományos, művészeti problémák megoldását egy konkrét kreatív tevékenységgel, modellalkotással, valamint az elvégzett tevékenység, illetve a megalkotott modell értelmezésével és elemzésével segítjük. Az *adott problémák megoldása során – módszertani és tárgyi eszköztárunk alkalmazása révén – minden alkalommal közös, illetve egyéni matematikai-művészeti alkotásokat hozunk létre*. Műhelyeinket, az alábbi táblázatban összefoglalt célrendszer szerint építjük fel:

CÉL	ESZKÖZRENDSZER
1. AZ ÉRZÉKELÉS CSATORNÁINAK MEGNYITÁSA	Képzőművészeti alkotások Kiállítások Modellező készletek Tanulói kísérletek Személyes kapcsolatok és interakciók a művészek, kutatók, tanárok, diákok, szülők bevonásával
2. GONDOLKODÁSI FOLYAMAT KIALAKÍTÁSA	
3. MODELLEZŐ KÉPESSÉG FEJLESZTÉSE	
4. ABSZTRAKCIÓS KÉPESSÉG FEJLESZTÉSE	
5. VERBÁLIS KÉPESSÉG FEJLESZTÉSE	
6. FOGALOMRENDSZER KIALAKÍTÁSA	
7. KUTATÁS-PROBLÉMAMEGOLDÁS	
8. ALKOTÁS: MŰVÉSZETI KOMPOZÍCIÓK ÉS „TUDÁS-TÁRGYAK" LÉTREHOZATALA	

Az ÉlményMűhely foglalkozásai kivétel nélkül olyan munkaformákon alapulnak, amelyek a közösségben való tevékenységközpontú ismeretszerzési folyamatot helyezik előtérbe. Az ÉlményMűhely foglalkozásain a tanulás kézbefogható, vizuálisan is megvizsgálható tárgyi eredményeket produkáló olyan folyamat, amely a diákok számára folyamatosan felkínálja az önkifejezés és önértékelés lehetőségét, a foglalkozás vezetőjének pedig irányt mutat a további csoportos és egyéni fejlesztési célkitűzések meghatározásában. Mivel az ÉlményMűhely mindenekelőtt szemléleti és módszertani keretet kínál a foglalkozásokhoz, a tanulási folyamatban feldolgozható témáknak és a feldolgozás módjának csak a kutatásra fordított idő és energia, valamint a fantázia szabhat határt.

6. Az ÉlményMűhely a pedagógusképzésben

Az ÉlményMűhely nemzetközi projektjeinek és növekvő ismertségének és elfogadottságának köszönhetően fokozatosan egyre nagyobb teret kaphat a magyarországi és a külföldi pedagógusképzésben is. A Kaposvári Egyetemen, az ÉlményMűhely hatására, kutatási koordinátorunk, Dr. Stettner Eleonóra vezetésével indult el a Matematika és művészet tantárgy, amely jelenleg szabadon választható tantárgy minden hallgató számára. Szeretnénk minden gyakorló és leendő matematika tanárnak a matematika örömét, a belefeledkező alkotó játék élményét átadni. Az elméleti anyag mellett a manuális tevékenység, „alkotások" készítése, modellezés, számítógépes minták tervezése egyaránt szerepet kap. A beadandó házi feladat is lehet bármely manuális, vagy számítógépes alkotás, gyakorló tanároknál az itt szerezett tapasztalatok kipróbálása saját tanítványaikkal, fotó sorozatok készítése. A célt a következő idézetek szellemében határoztuk meg:

„A matematikus — miként a festő és a költő — mintákat alkot. Ha ezek időtállóak annak az az oka, hogy gondolatokból állanak."
(Godfrey Harold Hardy)

„A matematika majdnem ugyanazokat a szellemi erőket állítja sorompóba, mint amelyeket a költészet és a művészet is megkíván."
(Dan Barbilian)

A cél meghatározásánál a következő elveket, gondolatokat vettük figyelembe:

- Matematikai rendszerre, gondolatmenetre felfűzve, művészeti alkotásokkal illusztrálva a tudományos és a művészeti világ egységének érzékeltetése.
- A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése a művészeti alkotásokban rejlő matematikai tartalom elemzése, egyszerű matematikai játékok által.
- A témák megközelítése a matematika szellemiségét hangsúlyozva, minimális formalizmussal történik.

8. ábra: Diákok alkotásai Dr. Stettner Eleonórának az ÉlményMűhely szemléletén alapuló egyetemi kurzusáról.

KÜLSŐ ÉS BELSŐ DIFFERENCIÁLÁS AZ ALSÓ TAGOZATOS MATEMATIKAOKTATÁSBAN

Pintér Krekić Valéria – Mrđa, Mirela – Lazić, Bojan

Újvidéki Egyetem, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka, Szerbia – Újvidéki Egyetem, Pedagógiai Kar, Zombor, Szerbia – Újvidéki Egyetem, Pedagógiai Kar, Zombor, Szerbia

A matematikaoktatás egyik legnagyobb hátránya az egységesség: elterjedt felfogás szerint a gyermekek között tapasztalható individuális különbségektől függetlenül a tananyagot egységes dinamikában kell elsajátíttatni, egységes oktatási formák és módszerek alkalmazása mellett. Az „ismétlők nélküli" iskolarendszerekben ez azt jelenti, hogy az oktatás középpontjába a gyengébb tanulók kerülnek, következésképp az oktatás eredménytelensége az uniformitás közvetlen következménye.

Ezzel szemben, differenciált munkára akkor kerül sor, ha a diákokat egyéni adottságaik, teljesítményük alapján csoportosítjuk. A csoportok lehetnek homogének vagy heterogének. Mindegyiknek megvan a maga előnye, de hátránya is. A gyakorlatban a heterogén csoportok működőképesebbek: a tanulók személyre szabott önálló munkát végezhetnek, fejlettségi szintjüknek többé-kevésbé megfelelő feladatok megoldása révén a maguk tempójában haladhatnak és fejlődhetnek. Ily módon a tanítónak is alkalma van a differenciált segítségnyújtásra úgy a csoport munkájának szervezésében, mint az egyéni munka irányításában és eredményességében.

A differenciált oktatást sokban segítik a megfelelő tantervek, a definiált oktatási tudásszintek, standardok. Ezek életre keltése világszerte folyamatban van.

Munkánkban azon kutatásainkat kívánjuk bemutatni, amelyeket a szerbiai alsó tagozatos matematikaoktatás oktatási standardjainak definiálása és a differenciált matematikaoktatás terén folytatunk.

Bevezetés

A „modern" matematika bevezetésének sikertelenségei a huszadik század utolsó évtizedeiben Szerbiában is visszarendezte az alsó tagozatos matematikaoktatás tanterveit. Az aktuális tantervek a klasszikus tartalmakra épülnek mellőzve a matematikai logikát, halmazokat, relációkat, kombinatorikát, valószínűséget, statisztikát stb. Ezt a megtorpanást főleg a megfelelő módszertan alkalmazkodásának, fejlődésének hiánya okozta. Azóta tudományos és szakmai körökben folyik a vita és az útkeresés, a gyakorlat pedig kivár.

Az oktatás fejlesztését és eredményességének növelését világszerte az oktatási standardok definiálásában, az oktatás differenciálásában és individualizálásában keresik. Ennek folyományaként a zombori Pedagógiai Karon az oktatás belső differenciálása és individualizálása terén már hosszabb ideje folynak olyan módszertani kutatások, amelyeket különböző projektumok keretében végeznek. Az alsó tagozatos matematikaoktatás esetében a differenciált egyéni munka elméleti alapjainak, szervezésének és modelljeinek problematikáján van a főhangsúly.

Az alsó tagozatos matematikaoktatás belső differenciálása

A matematika tanításában alkalmazott munkaformák közül mindmáig a frontális osztálymunka a domináns. A csoportmunka leginkább kollektív munkaformában történik, amikor az eredményhez folyamatos együttműködéssel, egyszerre jut el a csoport. A munkamegosztásos csoportmunka esetében egy feladatot részekre bontunk, melyeket a csoport tagjai külön-külön oldanak meg, majd a kapott eredményeket, teljesítményt összegezik – ez a munkaforma összetettebbnek mutatkozik, minthogy a feladatok differenciálása és individualizálása bonyolítja a folyamatot.

Az alsó tagozatos matematikaoktatás alapját a matematikai fogalmak kialakulása, felépítése és a megfelelő műveletek elsajátítása képezi. Mindez csakis a diákok aktív hozzáállásával, munkájával jöhet létre. Minden tanuló önállóan, de tanári irányítással vagy segítséggel, és a megfelelő oktatástechnológia alkalmazásával egyénileg tesz szert megfelelő tudásra, jártasságokra, készségekre, fejlesztve ezáltal képességeit. Az egyéni munka teszi lehetővé azt, hogy a tanulók megismerő tevékenysége aktívabbá váljék, s ezáltal a már kialakított fogalmak alapján önállóan jussanak el a belső kapcsolatok, törvényszerűségek felismeréséhez, valamint elsajátítsák a megfelelő műveleteket. Ennél a munkaformánál figyelembe vehetjük a diákok egyéni adottságait, képességeit, nehézségeit, és alkalmazhatjuk a segítség különböző formáit (motivációs, visszacsatolásos, stratégiai, tartalmi stb.).

Az önálló tanulás módszere, azaz az irányított és ellenőrzött tanulás talán csak az oktatás informatizálásával valósulhat meg. Ilyen irányú törekvések is vannak, de a differenciált egyéni munkaformának alkalmazása is eredményesnek bizonyult.

A nyolcosztályos általános oktatás elvi alapjait az egységesség érvényre juttatása határozza meg. A tanulók együttes és egyformán történő oktatásának, a valós vagy vélt közös sajátosságait szem előtt tartó pedagógiai munkának nagy hagyományai vannak. „Az egységes alapműveltség szintje biztosítja, hogy a tanulókban kifejlődjenek és megerősödjenek azok az alapok, amelyek az együttgondolkodáshoz, az együttes tevékenységhez, a tudás társadalmi »értékesítéséhez« szükségesek". (Lappints 2002, 237–239.)

Ma már nem nagyon vitatják, hogy egy-egy osztály tanulói nemcsak megegyezhetnek egymással az oktathatóság szempontjából lényeges jegyekben, hanem különbözhetnek is egymástól. Az utóbbi időben mind többet foglalkoznak elméleti és gyakorlati szinten a differenciálás kettős funkciójával: az egyik az eltérő személyiségvonású, fejlettségű tanulók eljuttatása egy bizonyos egységes műveltségi alapszinthez, a másik pedig az, hogy az egységes alapszintre és az egyéni adottságokra, irányultságra építve minden tanuló optimálisan fejlessze személyiségét. Az egységesség és differenciáltság együttes érvényesítésének gondolata tehát az oktatási folyamat szintjén abból a felismerésből

ered, hogy a hatékonyság érdekében nemcsak a tanulók közös, hanem egyéni sajátosságaira is tekintettel kell lenni. Jelenleg úgy tűnik, hogy sem a kutatások, sem a törekvések terén nem érvényesül eléggé az együttes érvényesítésre törekvés, az erőket egyelőre inkább a differenciáltságot biztosító megoldások keresése köti le (Nádasi, 1986).

Egyes szerbiai kutatók (pl. Petrović 2002, Dejić, Egerić 2003, Mrđa 2008, Maričić 2012) az alsó tagozatos matematikaoktatás tartalmi és módszertani differenciálásával, annak modelljeivel és gyakorlatával, míg mások (Pinter 1997) a belső differenciálás irányításának kibernetikai alapjaival foglalkoznak. Eredetisége miatt utóbbival kicsit bővebben foglalkozunk.

A differenciált kezdő matematikaoktatás kibernetikai modellje

Ez a modell a matematikaoktatást úgy definiálja, mint egy kibernetikai rendszert, melynek elemei a tanító és a diákcsoport. A rendszer dinamikus, működését meghatározott konkrét célok, kimeneteli kritériumok vezérlik. Rendelkezik megfelelő visszacsatolásokkal a tanuló-tanító és a diákok között is, ugyanakkor a tankönyv és más taneszközök (pl. számítógép) is rendelkezésre állnak.

A bemeneti adatokat a dákok előtudása, képességeik és más adottságaik (pszichológiai, szociológiai stb.), a kijelölt tananyag és az alkalmazott oktatási technológia képezik, beleértve a taneszközöket és más segédeszközöket is.

Az irányítás kritériumait a tanítási egység tartalma és meghatározott tudásszintje, valamint a kitűzött formatív oktatási-nevelési célok és feladatok definiálják. Az irányítási hatások differenciáltak és individualizáltak, eredhetnek a tanítótól, de a diáktársaktól is.

A kimenetet az elsajátított ismeretek terjedelme, szintje, a kialakult jártasságok és készségek, valamint a megfelelő képességek szintjének növelése, illetve a nevelési feladatok teljesítése határozzák meg.

A definiált rendszer irányítása komplex és hierarchikus (a tanító „felsőbbrendűsége"), ám magába foglalja a diákok önrendelkezését is.

A rendszerelméleti és kibernetikai szemlélet sokban hozzájárulhat a differenciált oktatás elméleti és gyakorlati problémáinak megoldásához.

Az alsó tagozatos matematikaoktatás tudásszintjei, oktatási standardjai Szerbiában

A matematikaoktatási standardok, tudásszintek megjelenésével (National Council of Teachers of Mathematics 1989.) előbb az USA-ban, majd világszerte bevezetik az általános oktatási standardokat, tudásszinteket (Improving America's School Act 1994, Goals 2000, Educate America Act stb.). A nemzeti oktatási standardok, valamint az egyes oktatási területek tudásszintjeinek meghatározásával új oktatási reform vette kezdetét, melynek célja az oktatás fejlesztése, a tanítás és az iskolák minőségének növelése. Az oktatási standardok definiálják az elérhető tudásszinteket, a megfelelő készségek és jártasságok kialakulását. (Megjegyezzük: egyes országokban, pl. Németországban, Ausztriában csak a középszintet határozzák meg.) Ezeket speciális tesztekkel mérik, ellenőrzik. Az ellenőrzés eme módszere azonban sokakban kétségeket ébreszt az egész rendszer iránt. Egyesek szerint ugyanis az új szemlélet a tesztelés rabjává válik, a tanítás

fő célja a tesztre való felkészítés lesz (teaching-to-test-effect), a diákok közötti különbségek figyelmen kívül maradnak, gyengül a diákok egyéni felelőssége stb. (Goldstein 2004).

A finnországi tapasztalatok alapján ezzel kapcsolatban meg kell említenünk, hogy ők nem beszélnek oktatási standardokról, hanem „jó standardokról", amelyek a diákok tudásán kívül tartalmazzák a képességeiket is. A standardok magukba foglalják az iskola és az oktatás kultúráját, amelyek idomulnak a diákok fejlődéséhez és szükségleteikhez. Tehát az oktatás és nevelés mind tartalmilag, mind módszertanilag differenciált és individualizált. Az iskola az élet és a tapasztalatok tere, egy demokratikus közösség, a társadalom szerves része. Az iskola a tanulás intézete, a tanárok továbbtanulását is beleértve. A tesztek szerepe ebben a rendszerben jelentéktelen (Bašić 2007).

Szerbiában az alsó tagozatos matematikaoktatás standardjait, általános és oktatási tudásszintjeit 2011-ben határozták meg (lásd a mellékletet).[41] A nemzeti oktatási standardok modelljét a The Development of National Educational Standards Federal Ministry of Education and Research (2002) képezi, mely szerint a jó standardok jellemzői: a kiemelt oktatási standardok ellenőrizhetősége, a mindenkire való érvényesség elve, az alaptudásokra való koncentrálás, differenciálás, érthetőség, megvalósíthatóság, folytonosság (Чапрић 2009).

A matematikai standardok az oktatás első ciklusának végén a következő részterületek tudásszintjét tartalmazzák:

- természetes számok és műveletek a természetes számok halmazában,
- geometria,
- törtek,
- mérés és a mértékegységek.

A matematikaoktatási standardok megalkotói minden felsorolt részterületre a külső differenciálás révén alap-, közép- és haladó szinten pontosítják a tudás kereteit, az elsajátítandó képességeket és készségeket. Ugyanakkor közvetetten a pedagógusokat is, és az iskolákat is felhatalmazták a belső (tanórai) differenciálásra.

Alapszinten a tanulók legalább 80%-ától elvárják, hogy az adott fogalmakat legalább a konkrét példák megkülönböztetésének szintjén sajátítsák el, felismerjék és használják a megfelelő terminusokat és szimbólumokat. Képi vagy más interpretációk segítségével képesek legyenek az elemi műveletek elvégzésére.

Középszinten a tanulók mintegy 50%-ától megkövetelik, hogy képesek legyenek önállóan kiválasztani azon példákat, melyekben meghatározhatják a közös vonásokat és törvényszerűségeket. Tudniuk kell továbbá használni a felismert szabályokat azok szimbolikus alakjában, pontosan és rutinosan számoljanak.

Haladó szinten a tanulók várhatóan 25%-ának tökéletesen kell ismerniük a fogalmakat, képesnek kell lenniük megfelelő szabályok alapján magas, automatikus szinten műveleteket végezni velük. Ezeket a szabályokat szavakkal és szimbolikusan is ki kell tudniuk fejezni, tudatában kell lenniük elvontságuk fokával és hierarchiájával. Ezektől

[41] Az általános iskolák kimeneti tudásszintjein belül határozták meg az anyanyelv, a matematika és a természetismeret oktatásának első szintje, azaz az első négy osztály kimenetelének oktatási standardjait.

a tanulóktól elvárható, hogy a formálisan kifejezett feltételekből következtetéseket vonjanak le.

Az iskolának és a tanároknak meg kell teremteniük azokat az anyagi és módszertani feltételeket, melyek lehetővé teszik, hogy a diákok a megfelelő ciklus végén képességeikhez és érdeklődésükhöz mérten elérjék az oktatási optimumot.

A tanárok munkáját az elmúlt időszakban az oktatás célja és feladatai szabták meg, a definiált standardok ezeket konkretizálták és operacionalizálták. Fontos megjegyezni azt is, hogy ezáltal a matematikaoktatás differenciálása és individualizálása is termékeny talajra talált.

Azzal, hogy a gyakorlat hogyan fog reagálni ezekre a változásokra, még korai foglalkozni. Az is válaszra vár, hogy mennyire vannak ezekre a változásokra felkészítve, felkészülve maguk az iskolák és a tanárok, beleértve a megfelelő tankönyvek és segédanyagok kérdését. Magyarán, szerbiai tapasztalatokról még nemigen beszélhetünk, mivel még csak egy „kísérleti" iskolaév van mögöttünk.

Zárszó

Munkánkban vázoltuk azokat a pedagógiai jelenségeket, amelyek jellemzik a szerbiai kötelező általános oktatást. Mind az iskolák gyakorlatában, mind a tudományos körökben nagy hangsúlyt fektetnek az oktatás és nevelés differenciálására, a bevezetett oktatási standardok megvalósítására.

Bemutattuk az alsó tagozatos matematikaoktatás tudásszintjeit, oktatási standardjait, valamint ismertettük az e területen végzett tudományos kutatásokat.

Reméljük, hogy a beindított folyamatok hozzájárulnak az oktatás minőségének és eredményességének növeléséhez, és jó példaként szolgálnak az általános oktatás fejlesztéséhez.

Irodalomjegyzék

Bašic, S. (2007): Obrazovni standardi – didakticki pristup metodologiji izrade kurikuluma, u: Previšic, V. (ur). *Kurikulum: teorija – metodologija – sadržaj – struktura*. Zagreb: Zavod za pedagogiju, Školska knjiga. 117–155.

Чапрић, Г. (ур.) (2009): *Образовни стандарди за крај ообавезног образовања*, Београд: Министарство просвете Републике Србије, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Dejić, M., Egerić, M. (2003), *Metodika nastave matematike*, Jagodina: Učiteljski fakultet

Goldstein, H. (2004), *Measuring educational standards*. Retrieved 18. 07. 2012. From http://www.bristol.ac.uk/cmm/team/hg/measuring-educational-standards.pdf

Grubor, A. (1996): Didaktički model »Panonija« u funkciji diferencirane i individualizirane nastave, Učiteljski fakultet, Sombor.

Lappints, Á. (2002): *Tanuláspedagógia. A tanulás tanításának alapjai*. Comenius Bt., Pécs.

Маричић, С. (2012), *Образовни стандарди и унапређивање почетне наставе математике*, Научни слуп „Настава и учење"- циљеви, стандарди, исходи, Учитељски факултет у Ужицу.

Mrđa, M. (2008): Diferencirana pomoć učenicima u problemskom pristupu interaktivnoj nastavi matematike. *Norma* 2008/ XIII. broj 3. 105–120.

Nádasi M. (1986): *Egységesség és differenciáltság a tanítási órán.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Petrović, N. (2002): *Modeli diferencirane obrade nastavnih jedinica u početnoj nastavi matematike*, Osobine učenika i modeli diferencirane nastave – činioci efikasnosti osnovnog obrazovanja, Zbornik radova 4, Učiteljski fakultet, Sombor, 2002., 61–75.

Pinter, J. (1997): *Teorijske osnove upravljanja diferenciranom nastavom matematike*, Simpozijum Činioci i indikatori efikasnosti i metode unapređivanja osnovnog vaspitanja i obrazovanja, Zajednica Učiteljskih fakulteta Srbije i Ruska Akademija obrazovanja Moskva, Zlatibor, 1997., 262–274.

Правилнику о образовним стандардима за крај првог циклуса обавезног образовања за предмете српски језик, математика и природа и друштво 7. јуна 2011., *Просветни гласник РС*, бр. 5

Melléklet

Az alsó tagozatos matematikaoktatás oktatási standardjai Szerbiában (2011)[42]

ALAPSZINT

1. A TERMÉSZETES SZÁMOK, MŰVELETEK A TERMÉSZETES SZÁMOK HALMAZÁBAN

1MA 1.1.1.	Le tudja írni és le tudja olvasni az adott számot, össze tudja hasonlítani a számokat, nagyság szerint sorrendbe tudja őket szedni, ábrázolni tudja a számokat a számegyenesen.	1–4. osztály
1MA 1.1.2.	Ki tudja számolni az ezres számkörben a számkifejezések értékét, amelyben legfeljebb két összeadás és kivonás szerepel.	3–4. osztály
1MA 1.1.3.	Az ezres számkörben tud szorozni, tud osztani maradék nélkül (háromjegyű számot egyjegyűvel).	3–4. osztály
1MA 1.1.4.	Az egyműveletes szöveges feladat alapján le tudja írni helyesen a számkifejezést.	1–4. osztály
1MA 1.1.5.	Az ezres számkörben meg tudja oldani az egyszerűbb egyenleteket.	3–4. osztály

2. GEOMETRIA

1MA 1.2.1.	Meg tudja nevezni a síkbeli mértani alakzatokat (négyzet, téglalap, kör, háromszög, pont, szakasz, egyenes, félegyenes és szög) és felismeri a két síkbeli mértani alakzat egymás közötti helyzetét (párhuzamos, merőleges, eleme, része).	1–4. osztály (felbontva)
1MA 1.2.2.	Ismeri a hosszúság mértékegységeit és azok viszonyát.	1–4. osztály
1MA 1.2.3.	A mértékegység megadásával és rajz alapján a gyakorlatban alkalmazza a hosszúság mérését.	3–4. osztály
1MA 1.2.4.	A mértékegység megadásával és rajz alapján a gyakorlatban alkalmazza a területszámítást.	4. osztály

[42] A differenciált oktatásra vonatkozó tudásszintek Szerbia Hivatalos Lapjának („Службени гласник СР Србије - Просветни гласник“) 2011. évi 5. számú kiadványában jelent meg.

3. A TÖRTEK

1MA 1.3.1.	Le tudja olvasni a tört értékét, le tudja írni a /n (n≤10) alakú törtet, a grafikus ábráról leolvassa a tört értékét.	2–4. osztály
1MA 1.3.2.	Ki tudja számolni valamely szám felét, negyedét és tizedét.	2. osztály

4. A MÉRÉS ÉS A MÉRTÉKEGYSÉGEK

1MA 1.4.1.	Különböző módon ki tud fejezni bizonyos összeget különféle pénzegységekkel, és tud számolni a pénzzel.	1–4. osztály
1MA 1.4.2.	Tudja, hogy az adott mennyiségű folyadék mérésére melyik mértékegységet kell haszni (l, dl, ml).	3–4. osztály
1MA 1.4.3.	Tudja, hogy az adott mennyiségű tömeg mérésére melyik mértékegységet kell haszni (g, kg, t).	3–4. osztály
1MA 1.4.4.	le tudja olvasni az egyszerűbb grafikonok, táblázatok és diagramok értékeit.	1–4. osztály

KÖZÉPSZINT

1. A TERMÉSZETES SZÁMOK, MŰVELETEK A TERMÉSZETES SZÁMOK HALMAZÁBAN

1MA 2.1.1.	Alkalmazni tudja a természetes számok tulajdonságait (páros, páratlan, legnagyobb, legkisebb, megelőző, rákövetkező), valamint megérti a tízes számrendszert.	1–4. osztály
1MA 2.1.2.	Meg tudja határozni az adott számhoz legközelebb álló tízest, százast és ezrest.	2–3. osztály
1MA 2.1.3.	Összead, kivon és kiszámítja a kifejezés értékét.	1–4. osztály
1MA 2.1.4.	Kiszámítja a két műveletből álló számkifejezés értékét.	1–4. osztály
1MA 2.1.5.	Meg tudja oldani az egyenleteket.	2–4. osztály

2. GEOMETRIA

1MA 2.2.1.	Érzékeli a síkbeli mértani alakzatok kölcsönös helyzetét.	1–4. osztály
1MA 2.2.2.	Át tudja alakítani a hosszúság mértékegységeit.	1–4. osztály
1MA 2.2.3.	Ismeri a terület mértékegységeit, és a köztük fennálló viszonyokat.	3–4. osztály
1MA 2.2.4.	Ki tudja számítani a háromszög, négyzet és a téglalap kerületét, ha a számításhoz szükséges adatok ugyanabban a mértékegységben vannak megadva.	3–4. osztály

1MA 2.2.5.	Ki tudja számítani a négyzet és a téglalap területét, amennyiben a számításhoz szükséges adatok ugyanabban a mértékegységben vannak megadva.	4. osztály
1MA 2.2.6.	Felismeri a kocka és a téglatest hálózatát, ki tudja számítani a felszínüket, amennyiben a számításhoz szükséges adatok ugyanabban a mértékegységben vannak megadva.	4. osztály

3. A TÖRTEK

1MA 2.3.1.	Felismeri az a/b ($b \leq 10$; $a<b$) alakú törtet grafikus ábrázolás esetén, amikor az alakzat b egyenlő részre van osztva.	2–4. osztály
1MA 2.3.2.	Ki tudja számítani az egész n-dik részét, az n-dik részből az egészet, össze tudja hasonlítani az 1/n alakú törteket ($n \leq 10$).	3–4. osztály

4. A MÉRÉS ÉS A MÉRTÉKEGYSÉGEK

1MA 2.4.1.	Különböző módon ki tud fejezni bizonyos összeget különféle pénzegységekkel, bizonyos összetettebb esetekben is tud bánni a pénzzel.	2–4. osztály
1MA 2.4.2.	Ismeri az idő mértékegységeit (másodperc, perc, óra, nap, hónap) és át is tudja a nagyobb mértékegységeket alakítani kisebb mértékegységekre, egyszerűbb esetekben össze tudja hasonlítani az időintervallumokat.	2–4. osztály
1MA 2.4.3.	A folyadék mértékegységeit át tudja alakítani (a nagyobbat kisebbre).	3–4. osztály
1MA 2.4.4.	A tömeg nagyobb mértékegységeit át tudja alakítani kisebb mértékegységre.	3–4. osztály
1MA 2.4.5.	Fel tudja használni a grafikonok vagy a táblázatok adatait egyszerűbb feladatok megoldásánál, a megadott adatokat grafikusan tudja ábrázolni.	3–4. osztály

HALADÓ SZINT

1. *A TERMÉSZETES SZÁMOK, MŰVELETEK A TERMÉSZETES SZÁMOK HALMAZÁBAN*

1MA 3.1.1.	A feladatok megoldása során tudja alkalmazni a természetes számok tulajdonságaival kapcsolatos ismereteket.	1–4. osztály
1MA 3.1.2.	Ismeri az összeadás és a kivonás tulajdonságait, és alkalmazza is őket.	3–4. osztály
1MA 3.1.3.	A műveletek sorrendjének ismeretében ki tudja számítani a többműveletes számkifejezések értékét.	2–4. osztály

1MA 3.1.4.	Képes megoldani összetettebb, többműveletes szöveges feladatot.	2–4. osztály
1MA 3.1.5.	Meg tudja oldani az egyműveletes egyenlőtlenséget.	4. osztály

2. GEOMETRIA

1MA 3.2.1.	Át tudja alakítani a terület kisebb mértékegységeit nagyobb mértékegységekbe.	4. osztály
1MA 3.2.2.	Ki tudja számítani a háromszög, négyzet és a téglalap kerületét.	3–4. osztály
1MA 3.2.3.	Ki tudja számítani a négyzet és a téglalap területét.	4. osztály
1MA 3.2.4.	Ki tudja számítani az összetett síkbeli mértani alakzatok kerületét és területét, amennyiben a számításhoz szükséges adatok ugyanabban a mértékegységben vannak megadva,	3–4. osztály (felbontva)
1MA 3.2.5.	Ki tudja számítani a kocka és a téglatest térfogatát, amennyiben a számításhoz szükséges adatok ugyanabban a mértékegységben vannak megadva.	4. osztály

3. A TÖRTEK

1MA 3.3.1.	Le tudja olvasni és írni, valamint ábrázolni tudja grafikusan az a/b ($b \leq 10$; $a<b$) alakú törtet.	2–4. osztály
1MA 3.3.2.	Ki tudja számítani az egész a/b ($b \leq 10$; $a<b$) részét, és ezt a tudást alkalmazni feladatok megoldásakor.	2–4. osztály

4. A MÉRÉS ÉS A MÉRTÉKEGYSÉGEK

1MA 3.4.1.	Ismeri az idő mértékegységeit (másodperc, perc, óra, nap, hónap, év, évszázad) és át is tudja alakítani őket, összetettebb esetekben is össze tudja hasonlítani az időintervallumokat.	2–4. osztály (felbontva)
1MA 3.4.2.	Át tudja alakítani a folyadék űrtartalmának mérésére szolgáló mértékegységeket.	4. osztály
1MA 3.4.3.	Át tudja alakítani a tömeg mérésére szolgáló mértékegységeket.	3–4. osztály

LÁTÓKÖR-SZÉLESÍTÉS NEMEUKLIDESZI MODELLEK (INFORMATIKAI ESZKÖZÖKÖN TÖRTÉNŐ) KIPRÓBÁLÁSÁVAL

Szabó Zoltán

Többnyire azok a diákok szeretik meg a matematikát, akik észreveszik, hogy tanárjuk is lelkesedik egy-egy téma iránt. Ez a terület időnként kívül esik a törzsanyagon, ám vannak alkalmak (pl. ünnepek előtt), amikor ezek is terítékre kerülhetnek. Ilyenkor rávilágíthatunk: a matematika jóval bővebb és színesebb annál, mint amit a kötelező kereteken belül tanulunk. A normál tananyag is tágabb látószögből látszik, ha teret engedünk más kontextusnak is.

A nemeuklideszi geometria vonzó a diákok számára; már csak magyar vonatkozása miatt is. A tanórákon nincs lehetőség erről teljes mélységében értekezni, ám a mai informatikai infrastruktúra révén ezek(modelljei)t ki lehet próbálni. Meg lehet őket tekinteni (3D-ben is), lehet empirikusan érzékel(tet)ni.

A fizikai kutatások fényében az látszik, hogy komoly realitása van ezen modelleknek, s hogy – horribile dictu – esetenként jobban tükrözik a valóságot, mint Eukleidész régi jó egyenesei.

Egyetemi szakdolgozatomként egy CAD-programban létrehoztam a Poincaré-modell elemeit megvalósító menüpontokat. Ezek kipróbálása is élményszerű, ám ma már számtalan webes lehetőség is a diákok rendelkezésére áll, pl.: mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html.

Tíz év középiskolai tanárság után most öt éve ipari informatikával foglalkozom, leginkább Linuxon. 17 éve, Csikós Balázs tanár úrnál írt szakdolgozat-témámat bányásztam most elő: ***Hiperbolikus szerkesztések AutoCAD-ben***, és kiegészítettem néhány apróságggal. Az előadás anyaga, valamint egy használható geometriai program (és telepítési leírása) megtalálható a web2.osb.hu/z/konf5 webhelyen. Érdeklődő kérdéseket szívesen fogadok a szabozoltan969@gmail.com címen.

A mai ember nagyon szereti vizuálisan is látni, amiről szó van (pl. a geometriában); és amennyire csak lehet, ki is próbálnánk interaktív módon a dolgokat: amit lehet mozgatni, megmozgatnánk.

Ma már ehhez megvannak az ingyenes informatikai eszközök is.

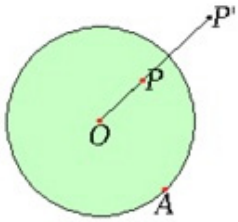
Az inverzió

A definíció alapján sokan ráéreznek az inverzió tulajdonságaira; a tükrözéssel való rokonságára. S mivel tükrözések sorozatával szinte minden fontosabb geometriai transzformáció megvalósítható (pl. forgatás), ezért az sem meglepő, hogy inverziók sorozatával is csodák művelhetőek.

Az inverziót ki tudják próbálni a diákok (akár offline módon is) a aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/compass/compass3.html oldalon. Szépen látszik, hogy arrébb húzva a P pontot hová kerül P'; melyek a fixpontok stb. Sőt, az is megsejthető, hogy kör képe általában kör (s hogy melyik a fixkör).

Egy kiváló „empirikus" geometriai eszköz a Geogebra, aminek webes változata kipróbálható pl. itt: www.geogebra.org/webstart/geogebra.html, de offline változata is van (www.geogebra.org).

Ebben lehetőség van egy-egy pont invertálására.



1. ábra

Térbeli ábrázolás

A matematika és a fizika, kémia több területén is hasznos (és érdekes), ha térbeli ábrákat is tudunk láttatni a gyerekekkel. A 3D-s mozik világában felnövő generáció számára ez különösen is felcsigázó tud lenni. Nem kell sok ahhoz, hogy ez a tanteremben is megvalósulhasson: anaglif szemüvegeket (magenta/zöld vagy az elterjedtebb piros/ciánkék változatot) 250 Ft-ért lehet kapni (pl. itt: www.3dszemuveg.hu), vagy akár házilag is lehet készíteni (fóliára nyomtatással). Az lehet a vezérelv, hogy a három alapszínből (pl. ciánkék, magenta, sárga) az egyik legyen az egyik szem előtt, a másik kettő keveréke pedig a másik szem előtt, ám lehetőleg a fényerő maradjon azonos.

Néhány webhely-javaslat a térbeli alakzatokhoz, ahol az ábrák többnyire meg is forgathatóak egérrel:

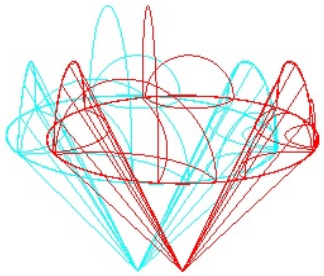
virtualmathmuseum.org/gallery4.html.

pl. virtualmathmuseum.org/Surface/hyperbolic_k1_sor/hyperbolic_k1_sor_lg1.html

3d-xplormath.org/j/applets/en/

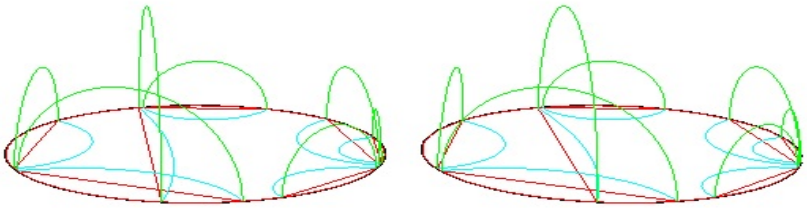
pl. 3d-xplormath.org/j/applets/en/vmm-spacecurve-parametric-Loxodrome.html

Egy ábra a piros-ciánkék 3D-s szemüveghez.

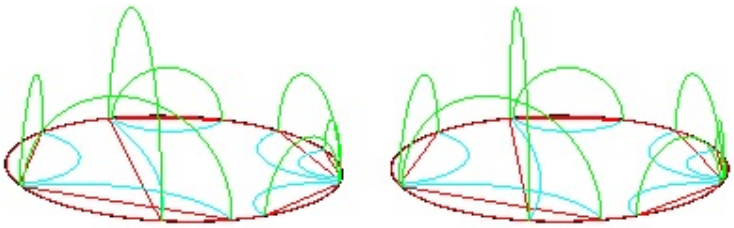


2. ábra

Szabad szemmel is megvalósítható a síkbeli ábra térbeli nézése (és akkor nem vesznek el [vagy, ami szintén előnyös: nem kellenek] színek), bár ahhoz kell némi ügyesség (szemkeresztezéssel vagy jó távoli pont kiszemelésével; egyszersmind a papír síkjára fókuszálással). A lényeg itt is az, hogy mindkét szemünk a neki szánt ábrát lássa. S eme „bűvös nézés" mellékhatása lehet a (távollátó) szemüveg kinövése, ahogy az a saját esetemben is történt 17 éves koromban...



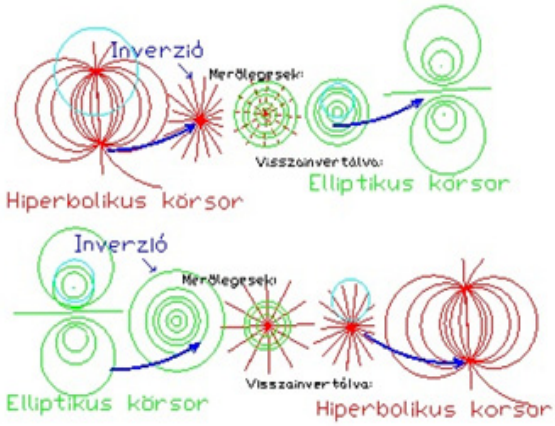
X



U

3. ábra

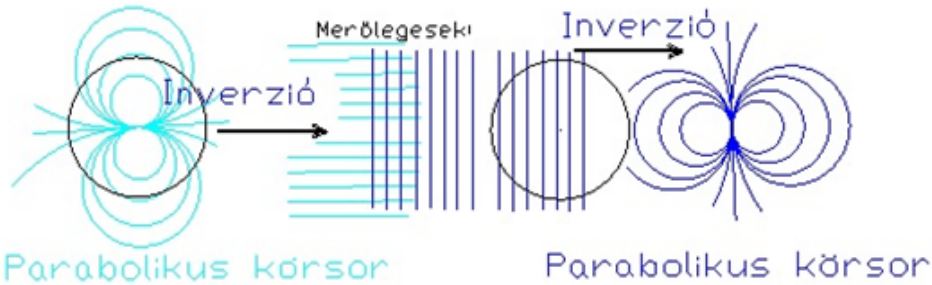
Tegyünk egy rövid kitérőt az Apollóniosz kör irányába: hu.wikipedia.org/wiki/Apollóniusz-kör



4. ábra

Ez a téma elemi fogalmakkal is megközelíthető (mértani hely: két ponttól mért távolságarány adott), ugyanakkor megalapozhatja a körsorok, sugársorok gondolatvilágát, amit érdemes ismerni a hiperbolikus sík megalapozásához. S az inverzióval társítva különösen is izgalmas téma, amit ráadásul ki is tudunk próbálni a hamarosan terítékre kerülő programmal.

Mivel az inverzió (nagy örömünkre) szögtartó, ezért számtalan szép tulajdonsága van eme körsoroknak. Pl: az inverzió körsort körsorba visz. Azon körök, melyek egy körsor elemeit merőlegesen metszik, szintén körsort alkotnak. (A konjugált körsort.)



5. ábra

Az imént emlegetett „nagy örömünk” többek között abból is fakadhat, hogy a sztereografikus projekció is inverzió, s ily módon az így készült térképeinken (ha a hosszúságokat nem is, de legalább a) szögeket pontosan tudjuk mérni, és a körök körök maradnak.

demonstrations.wolfram.com/StereographicProjection

Jó volna, ha nem távozna úgy senki, hogy ezt a wolfram... webhelyet meg ne jegyezné. A www.wolframalpha.com olyan „matematikai súgó”, amit tanárként is gyakran segít-

ségül lehet hívni (és jó tudni, hogy a diákok is használhatják). Egy egyszerű példa: a és b páros számok; bizonyítsd be, hogy $a^2 + b^2 + a^2b^2 + 1$ összetett szám. Kínlódtam paritással, egyebekkel. Mígnem aztán beírtam a wolframalphába, s többek között ezt kaptam: $(a^2+1)(b^2+1)$. Kész a bizonyítás.

A nemeuklideszi geometria vonzó a diákok számára; már csak (szokatlansága és) magyar vonatkozása miatt is. A tanórákon nincs lehetőség erről teljes mélységében értekezni, ám a mai informatikai infrastruktúra révén ezek(modelljei)t ki lehet próbálni. Különös világ ez, melyben nem teljesül Euklidész párhuzamossági axiómája, ám az összes többi igen; a következmények igen szépek és szemlélet-tágítóak.

Az érdeklődők tetszőleges mélységben beleáshatják magukat a témába. Néhány webhely:

hu.wikipedia.org/wiki/Nemeuklideszi_geometria

hu.wikipedia.org/wiki/Hiperbolikus_geometria

Surányi László (*Fazekas M. Gimn*) kiváló anyaga: home.fazekas.hu/~lsuranyi/BJ/BJ1.htm, mellyel Bolyai János Appendixe emészthetőbbé válik.

Egy komoly diasorozat: www.slideshare.net/nagygp/bevezets-a-bolyaigeometriba

Lépjünk végre a tettek mezejére!

1997-ben készült a szakdolgozatom, s az (ekkor még DOS alatt futó) AutoCAD-hez írtam sajátos menüpontokat, melyeket néhány kiegészítéssel láttam el az előadásra készülve.

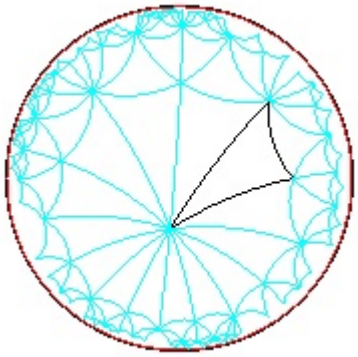
Egy mérnöki program megismerése csak javára válhat a gyerekeknek (is), és többnyire nagyon élvezik. Mivel ez már olyan régi (és a gyártója által már 10 éve nem támogatott) verzió, hogy nem is lehet kereskedelmi forgalomban kapni, így nem okoz jogi bonyodalmat a birtoklása.

Indítsuk is el, és próbáljuk ki pl. az inverziót, immár nemcsak pontra vonatkozóan...

Majd pedig nézzünk meg egy hiperbolikus geometriai modellt, a konform (avagy Poincaré-féle) körmodellt. mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html – itt rögtön szembeszökő a témának az inverzióval való szoros kapcsolata... Említsük meg Jules Henri Poincaré francia úriember nevét (1854 – 1912), aki igazi polihisztor volt; sokat köszönhet neki a matematika is.

Rajzoljunk a Poincaré modellben egyenest, szakaszt, kört, háromszöget, négyszöget...

(Összehasonlításként próbáljuk ki a Geogebrát is, ahol a szakaszok, egyenesek érzékelhetőek:



6. ábra

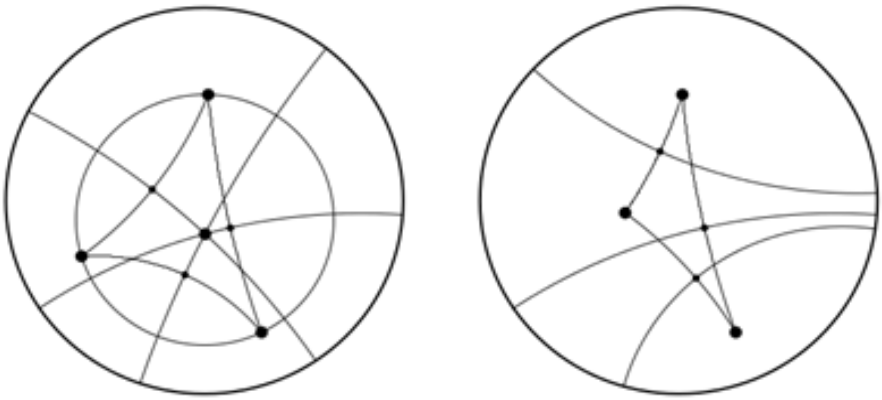
www.geogebra.org/en/upload/files/english/timbrophy/Poincare2.html)

Készítsünk parkettázást, mint itt: vmtdk.wordpress.com/2014/01/16/ago-krisztina-a-poincare-fele-kormodell-parkettazasa

Ez pedig egy kiadósabb (és magyar nyelvű) összefoglaló a Poincaré modellről: zeus.nyf.hu/~kovacsz/poincare.pdf, komoly matematikával és gyönyörű ábrákkal. Az utolsó oldalon meglepve láthatjuk, hogy e modellben nem minden háromszögnek van körülírt köre...

A következő ábrán láthatunk egy olyan háromszöget, melynek oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, s így van körülírt köre, illetve egy olyan háromszöget, melynek oldalfelező merőlegesei nem metszik egymást: nincs körülírt köre. A három pontra illeszkedő euklidészi kör az első esetben benne van $\mathcal{E}$-ben, (így ez a kör egyben a háromszög hiperbolikus körülírt köre is), míg a második esetben onnan kilóg.

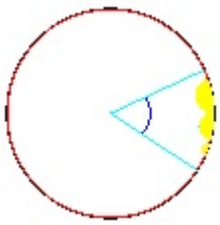
Kovács Zoltán, 2006. november 8.



7. ábra

Kovács Zoltán kiváló cikkének egyik bekezdése a szakaszfelező merőleges szerkesztésének a bemutatása (a Poincaré modellben). Próbáljuk is ki AutoCAD-ben!

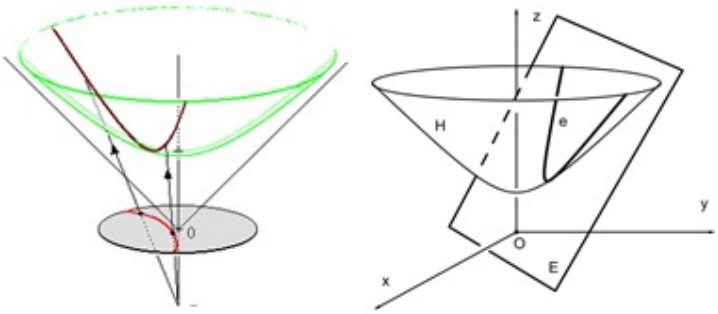
Említsük meg még a háromszögek egyéb furcsaságait: a szögösszeg nem 180° (hanem kisebb; más geometriában [pl. gömbi] akár nagyobb is lehet). Többféle (egyszeres, kétszeres, háromszoros) határháromszög is van. Kipróbálhatjuk még a tükrözést, forgatást, merőlegest, „párhuzamos(oka)t", vagyis elpattanó egyeneseket, illetve az ultraparallel egyenesek is láthatóak (amelyeknek nincs közös pontja, csak közös merőlegese). Van lehetőség hiperciklus (távolságvonal) és paraciklus („végtelen sugarú kör") rajzolására és sok más kellemes alakzat megtekintésére. Megtapasztalható, hogy milyen érdekes tulajdonságai vannak a hiperbolikus síknak, pl. tetszőlegesen kicsiny hegyesszög is tartalmaz végtelen sok félsíkot.



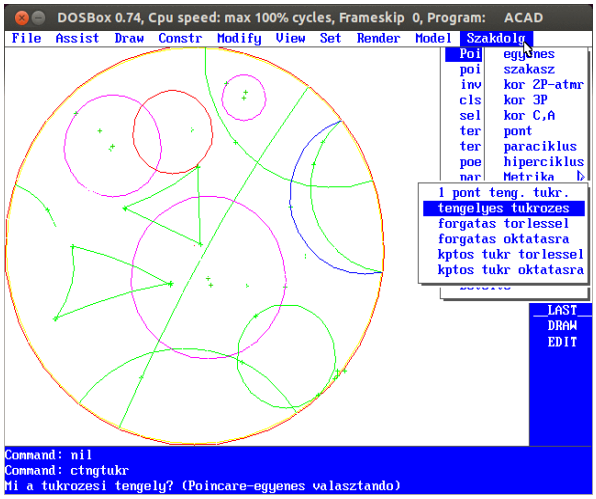
8. ábra

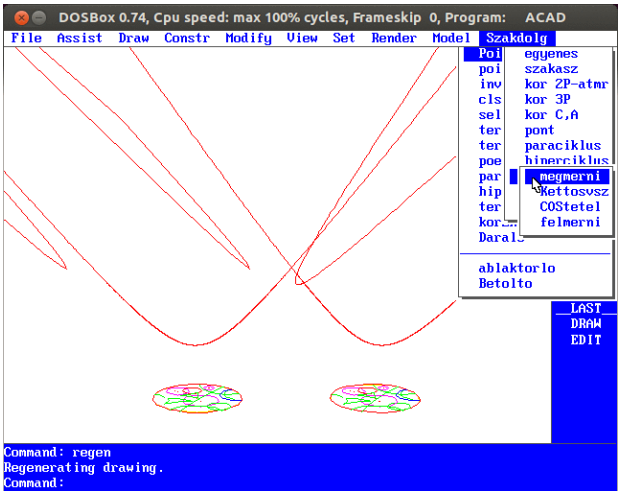
Említsük még meg a hiperboloid modellt, amely szoros rokonságban áll a Poincaré modellel.

Ez egy hiperboloidon, azaz „megforgatott hiperbolából készült üstön" él; ennek a felületnek az (origón áthaladó síkokkal történő) síkmetszetei az egyenesek. A Poincaré modell tekinthető úgy, mint a hiperboloid modell „alulról nézve" (a 0;0;-1 pontból).



9. ábra





10. ábra

Az AutoCAD programban lehetőség van a Poincaré modell szakaszait és egyeneseit átvinni a hiperboloid modellre, s ezt akár 3D-ben is megtekinthetjük.

11. ábra

Vereszky Pál Péter munkájából is tájékozódhatunk a hiperboloid modellről: www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2010/vereszky_pal_peter.pdf

Pl. innen ismertem meg a hiperciklus és paraciklus etimológiáját: az egyik hiperbola, a másik parabola alakú (a hiperboloid modellen). A hiperbolikus körök: ellipszisek.

Természetesen számos más „modell" is létezik még, pl. a már fentebb ábrázolt félgömb-modell, a pszeudoszféra-modell („trombita"), valamint az egyeneseket (körívek helyett) „rendes húrokkal" reprezentáló Cayley-Klein-modell...

A Poincaré modellen zoomolva kísérletezve hamar kiderül, hogy a modell kis területrésze olyasféle, mint az euklideszi világ. Ha csak ott rajzolgatunk, akkor (empirikusan) nem nyilvánvaló, hogy odébb haladva milyen szerkezetű is a hiperbolikus sík. Lehet, hogy mi is csak ennyit érzékelünk a világból, mint ami a Poincaré modell kicsiny területén van?

A „térgörbületnek" mérőszáma is van (k), amit ki is deríthetünk; konkrétan k = 0.5 a Poincaré modellünkben. A kutatásokból úgy tűnik, hogy univerzumunkban is van efféle térgörbület (pl. doboandor.freeweb.hu/pdfs/a_hiperbolikus_gorbult_terido_parametererol.pdf); vagyis egészen komoly realitása van ezen modelleknek, s hogy – horribile dictu – elképzelhető, hogy jobban tükrözik a valóságot, mint Eukliedész régi jó egyenesei.

TÉRSZEMLÉLET VIZSGÁLATA A 14 ÉVES KOROSZTÁLY KÖRÉBEN[43]

Ekéné Abuczki Marianna

Dunaharaszti II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola

Howard Gardner (1983) által bevezetett többszörös intelligencia fogalmának egyik területe a téri intelligencia. Ám ez nem csak „térszemlélet" Bognár Cecil (1932) értelmezésében, hanem a térbeliségre vonatkozó felidézett képeket, képzetet is ide érthetjük.

„Téri képességen tehát két- és háromdimenziós alakzatok észlelésének és az észlelt információk tárgyak és viszonylatok megértésének és problémák megoldására való felhasználásának képességét kell értenünk." (Gulyás, Kárpáti, Séra: A térszemlélet 2002. 19. o.)

A kutatás kapcsolódik Kárpáti Andrea egyetemisták körében vizsgált térszemlélet méréséhez. A Gulyás-Kárpáti-Séra monográfiában található, 14 éves korosztály számára készült tesztet alkalmazza, kiegészítve háttérkérdőívvel.

A minta négy általános tanrendű 8. osztály (81 fő), egy 6 évfolyamos (31 fő) és egy 8 évfolyamos gimnáziumi (29 fő) 8. osztály tanulóiból tevődött össze, összesen 141 fő.

A kutatás azt vizsgálja, mi befolyásolja a gyerekek térszemléletének kialakulását. Hat-e rá az oktatási forma, amelyben tanulnak, a különböző tantárgyakban való jártasság, a tanulók neme? Van-e rá hatással a szülők iskolázottsága? Ezeken kívül még egyéb tényezőket is ellenőriz: jobb-balkezesség, szemüveget viselés, sportok kedvelése, önálló közlekedés, számítógépes játékok hatása.

Másik szempont a vizsgálaton belül, hogy mi az a terület a téri észlelésen belül, amivel szinte minden tanuló rendelkezik, és mi az, ami csak bizonyos csoportok sajátossága.

A vizsgálat során háttérdokumentumok is elemzésre kerültek, mint az egyes iskolák matematika, rajz és technika tanmenetei.

Az eredmények alapján választ kaphatunk arra, hogy fejleszthető-e a tanulók térszemlélete, vagy öröklött adottság. Elemezzük a fejlesztés módszereit és lehetőségeit.

[43] A kutatás eredetileg szakdolgozat (2014), melynek konzulense Csíkos Csaba egyetemi docens.

Bevezetés

A gyerekeink és mi magunk is térben létezünk. Tárgyak vesznek körül bennünket. Meg kell tanítani a gyerekeinket ebben a világban a tárgyak használatára, a környezetük manipulálásra, a tájékozódásra. Ez alapvető szükséglet mindenki számára. Az, hogy ki milyen mértékben rendelkezik a téri intelligenciával, nagyban meghatározza az életben való sikerességét.

Ennek a vizsgálatnak a során arra kerestük a választ, hogy mi befolyásolja a térszemlélet kialakulását. Hatással van-e rá az iskolatípus, amelyben a vizsgált személy tanul. Befolyásolja-e a tanuló neme, a különböző tárgyakban való jártasság, a rendszeres sporttevékenység. A kutatás kapcsolódik Kárpáti Andrea egyetemisták körében vizsgált térszemlélet- méréséhez, egyben szakdolgozat (2014), melynek konzulense Csíkos Csaba egyetemi docens. A tanulók *Gulyás-Kárpáti-Séra (2002)* monográfiájában található, 14 éves korosztály számára készült tesztet töltötték ki kiegészítve háttérkérdőívvel. Az adatok rögzítése után elemzésre került sor, majd összevetettük ezt a megelőző, hasonló mérések eredményeivel. A következő eredményeket kaptuk.

Elméleti háttér

Howard Gardner (1983) által bevezetett többszörös intelligencia fogalmának egyik területe a téri intelligencia. Ám ez nem csak „térszemlélet" *Bognár Cecil (1932)* értelmezésében, hanem a térbeliségre vonatkozó felidézett képeket, képzetet is ide érthetjük.

„Téri képességen tehát két- és háromdimenziós alakzatok észlelésének, az észlelt információk, tárgyak és viszonylatok megértésének, és problémák megoldására való felhasználásának képességét kell értenünk." *(Gulyás, Kárpáti, Séra, 2002. 19. o.)*

Nagyon sok kutatást folytattak már annak kiderítésére, milyen életkorban, hogyan és milyen hatékonysággal fejlesztetők a téri képességek. A legtöbb vizsgálatnál az derült ki, hogy a leghatékonyabb a fejlesztés gyerekkorban, 10 éves kor előtt. *Kárpáti és Gyebnár (1996. 97. o.*) meglepő eredményre jutott. Szerintük a vizuális nevelés általában nem fejt ki hatást a téri képességekre. Úgy tűnik, a térszemlélet – a tér ábrázolása és ilyen ábrák olvasása – az a vizuális részképesség, amelyet a pedagógia programok – csak nagyon kis mértékben, sőt egyes életkorokban egyáltalán nem képesek fejleszteni." Kísérletük során egyedül a környezetkultúra-program bizonyult fejlesztő hatásának. Ebben a programban a 11-14 éves tanulók manuális munkákat végeztek. Maketteket, modelleket és háromdimenziós tárgyakat készítettek. *Séra, Kurimay, és Ocskó (2005)* kísérletük során a gyakorlás és a tapasztalat szerepét vizsgálták a téri képességekben. A nemek összehasonlítása során arra az eredményre jutottak, hogy a férfiak azért mutatnak jobb teljesítményt a téri képességekben, mert a mindennapokban inkább végeznek téri feladatokat, mint a nők. Sőt ezt az eredményt erősíti a mért személyek gyerekkori játékkedvelése. A fiúk nagyobb arányban játszanak téri játékokat (LEGO, modellezés), míg a lányok nem téri játékokat (Barbie baba, társasjáték). Második kísérletükben sportoló és nem sportoló fiatalokat hasonlítottak össze, és arra az eredményre jutottak, hogy a sporttevékenység segítségével ez a nemek közötti téri képességbeli különbég csökkenthető.

Módszerek

Minta

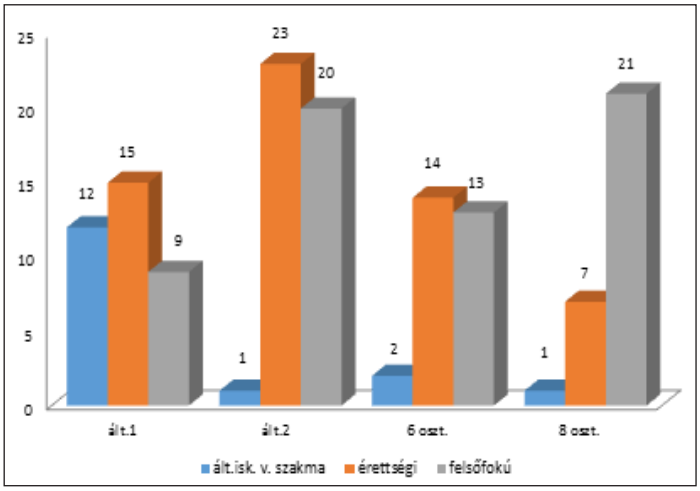
A kutatás a *Gulyás-Kárpáti-Séra (2002)* könyvben található tesztek javasolt alsó korhatárát, vagyis a 14 éves korosztályt vizsgálja. Ez a korosztály három különböző oktatási formában tanul: 8 osztályos általános iskola, 6 osztályos gimnázium, és 8 osztályos gimnázium. A minta kiválasztása annak arányában történt, amilyen arányban ezek között az intézmények között a gyerekek megoszlanak. 4 általános iskolai, egy 6 és egy 8 osztályos gimnáziumi 8. osztályt mér fel a kutatás. A tanulók létszámát és megoszlását az *1. táblázat* tartalmazza.

	fiú	lány	összesen
á1talános isk.	40	41	81
6 oszt. gimn.	8	23	31
8 oszt. gimn.	16	13	29
			141

1. táblázat: A kutatás mintája iskolatípusok szerint (fő)

Az általános iskolai osztályok között is különbség mutatkozott. Az 1. számú általános iskola normál tanrendű, míg a 2. számú iskola egyik osztálya német szakos, a másik emelt testnevelés óraszámú osztály.

A családiháttér-változót vizsgálva is különbségek tapasztalhatók. Az 1. számú általános iskola tanulói között sokkal több az alacsonyabb végzettségű szülő, hátrányos helyzetű család. (1. ábra)



1. ábra: A tanulók megosztása az anya iskolai végzettsége alapján (fő)

Mérőeszköz

Rajzpedagógia szerinti osztályozás (2. táblázat) (Séra, Kárpáti, Gulyás 2002. 85. old)

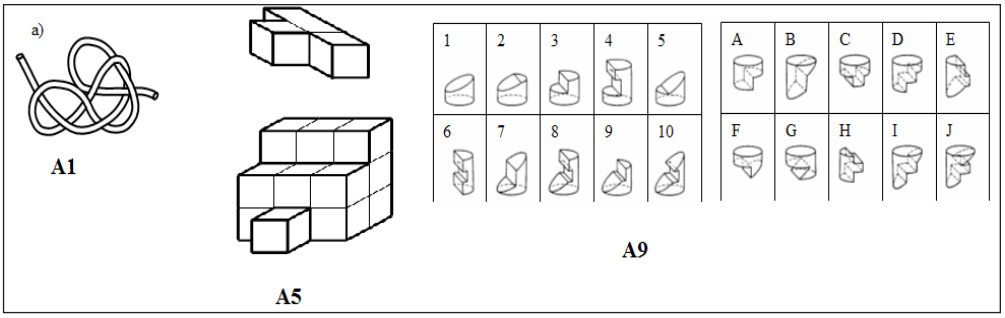
	RÉSZKÉPESSÉGEK	
FELADATTÍPUSOK	FELISMERÉS	MANIPULÁCIÓ
Vetületi ábrázolás és olvasás		B3
Rekonstrukció	C9	
Szerkezetlátás	B2	
Kétdimenziós vizuális elképzelés	A2, B4	
Térbeli alakzat felismerése, megjelenítése		
Háromdimenziós alakzatok összetartozó részeinek felismerése, párosítása	A9	
Háromdimenziós alakzatok képzeletbeli forgatása		
Tárgy képzeleti manipulálása		A7
Téri konstrukció		A5
Dinamikalátás		A1

2. táblázat: A feladatok témái (feladattípusok), és a lefedett részképességek (faktorok)

A teljes tesztfüzet (összesen 3*9 feladat) lefedi az összes feladattípust. Viszont a 14 éves korosztály számára összeállított, könnyített feladatsorba csak az alábbi feladatok kerültek (2. ábra) (tesztbeli sorrendjüknek megfelelően):

A7, A1, A5, A9, B2, B3, C9, A2, B4.

Jelen teszt feladatsora szintén a fent említett könyvből *(Séra, Kárpáti, Gulyás 2002. 131. old)* lett véve. Egy apró változtatás történt: a C1 feladatot, az azonos kategóriájú A1 feladatra cseréltem.



2. ábra: Néhány példa a feladatokból

A legnagyobb megoldottsági arányú az A9 feladat volt, ami a testdarabok párosítása. Precíz munkát igénylő, de nem túl nehéz feladat. Utána az A7 (kockahajtogatás)

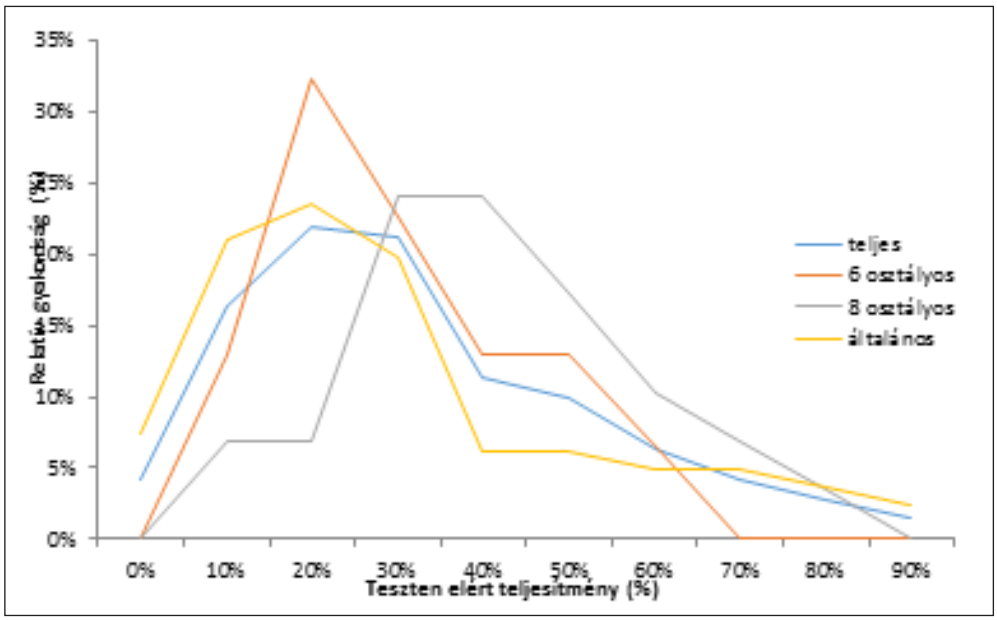
majd az A1 (a zsinórbogozás), következik, melyek a gyerekek számára a legéletközelibb feladatok. A legnehezebb feladatnak a B4-es bizonyult. A feladat gyenge megoldottsági arányához a nehézségén kívül a feladatsorban elfoglalt utolsó hely is hozzájárult.

A feladatok összpontszámai közötti korrelációkról elmondható, hogy a legtöbb feladatpár szignifikáns korrelációt mutat egymással, és az összpontszámmal. A legnagyobb mértékben a B2 (0,810) és a B3 (0,753) feladat hatott az összpontszámra.

A táblázatból kitűnik, hogy a feladatsor reliabilitási értéke elfogadható (0,811 Cronbach alfa) A tétel-összpontszám korrelációs értékek, vagyis az elkülönülési mutatók 0,306 és 0,630 közötti értékek, vagyis nullától magasabbak. Tehát a teszt jól elkülöníti a különböző képességű tanulókat. Vagyis a jó képességű tanulók nagyobb valószínűséggel oldják meg a feladatokat, mint a gyengébbek.

Eredmények

A teljes minta átlaga 37,59, a szórása 20,97 volt. Annak eldöntésére, hogy a minta átlaga szignifikáns módon eltér-e a populáció átlagától, t-próbát végeztem. A populáció adatai a *Térszemlélet könyv (111. o.)* adataiból lettek véve. Látható, hogy a mérésem során kapott eredmények szignifikánsan nem térnek el *Séra-Kárpáti-Gulyás* hármas által 1998-2001 között végzett mérések eredményétől.



3. ábra: A teszten elért teljesítmény iskolatípusok szerinti bontásban

Szemmel láthatóan erősen balra ferdülő eloszlás alakult ki (median<modusz<átlag). Ez köszönhető egyrészt a tanulók gyenge teljesítményének, másrészt a teszt nehézségének. Azonban, ha megvizsgáljuk iskolatípusok szerint is az eredményt, a 8 osztályos gimnázium eredményei már csak minimálisan ferdülnek balra a normális eloszlástól. Az

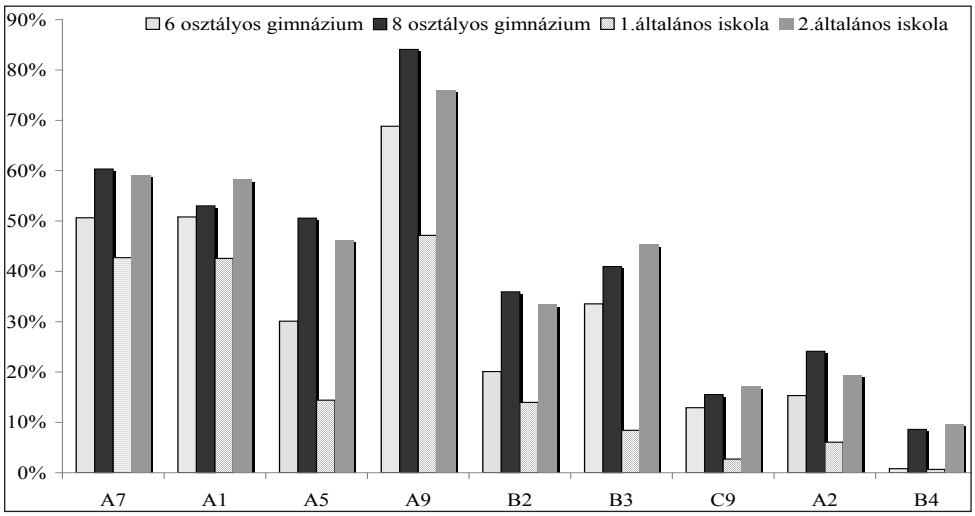
egész minta átlagától, és a két iskola átlagától is körülbelül 10 százalékponttal magasabb az eredményük.*(3.* ábra)

A teszt klaszterdiagramja szerint a feladatok két jól elkülönülő klasztert alkotnak. Három feladat különül el (A7, A1, A9), és közel van hozzájuk az A5. Ezek közül az A7, A1 és az A5 manipulációs feladat, az A9 pedig felismerési részképességet igényel. A faktorokra való tagolás során szintén elkülönült ez a négy feladat (A7, A1, A5 és az A9). Mindkettő háromdimenziós testek részekre bontásával és összeillesztésével kapcsolatos feladat. A többi egy kategóriát alkot. Bár a B2-es feladat két értéke között (1: 0,544; 2:0,511) nagyon kicsi a különbség.

Iskolatípusok összehasonlítása

Két-két iskolatípust kétmintás t-próbával összehasonlítva, azt az eredményt kapjuk, hogy az iskolatípus szignifikánsan befolyásolja a térszemlélet teszt eredményét. (Általános és 6 osztályos gimnázium: t=0,480, p=0,962; Általános és 8 osztályos gimnázium: t=-2,363, p=0,020; 6 osztályos és 8 osztályos gimnázium t=-2,778, p=0,007).

További vizsgálatokat érdemes végezni a fenti eredmény okainak kiderítésére.



4. ábra: A feladatok iskolánkénti átlagai

Az ábrát elemezve az látható, hogy különbség van a két általános iskola eredményei között. Sőt az egyik (2.sz.ált.isk.) bizonyos feladatokban (A1, B3, C9, B4) meg is előzi a 8 osztályos gimnáziumot. *(4. ábra)*

A KÉT ÁLTALÁNOS ISKOLA ÖSSZEHASONLÍTÁSA SORÁN SZIGNIFIKÁNS KÜLÖNBSÉG TALÁLHATÓ KÖZÖTTÜK (F=26,94, p<0,001; t=-5,99, p<0,001). Jelentős különbség tapasztalható a két iskola teljesítményének a szórása és az átlaga között. Ezek alapján adódott a következő összehasonlítás. A 2. számú általános iskola és a 8 osztályos gimnázium eredményeinek összevetése. Itt viszont a szórások között volt,

de az átlagok között már nem volt szignifikáns különbség (F=7,526 p=0,008; t=-0,056 p=0,955).

Kiderült, hogy bizonyos iskolák esetén nincs különbség a különböző iskolatípusok teljesítménye között. Vizsgáljuk tovább, mi lehet ennek az oka!

Vizsgáljuk most a 2. számú általános iskola két osztályát, ahol az egyik emelt német, a másik emelt testnevelés szakos osztály. Összehasonlítva a két osztály eredményeit (F=1,939 p=0,171; f=-0,466 p=0,644), nem található szignifikáns különbség a két osztály eredményeinek szórása, és nincs különbség az átlaga között sem.

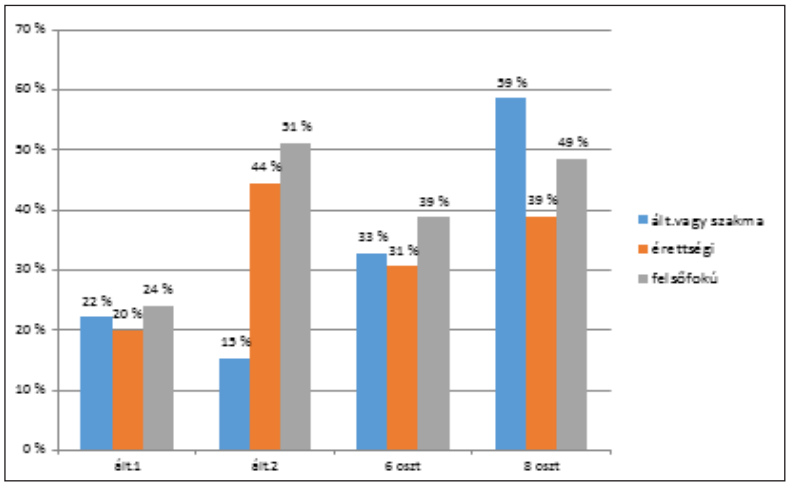
Mindezek után érdemes megvizsgálni, hogy mi különbözteti meg ezt az iskolát a többitől. Az egyik jelentős különbség az emelt testnevelés órájú osztály, ami mellett a németes osztály tanulóinak szintén jelentős része (70%-a) versenyszerűen sportol. A másik különbség a technika tárgy tanításában rejlik. Ebben az iskolában van egyedül műhely, ahol manuális feladatokat tudnak végezni a tanulók, és mindezek mellett tervrajzokat és szerkezeti ábrákat is rendszeresen készítenek. (Technika tanmenete 2013.)

A feladatok és háttérváltozók összefüggés-vizsgálata

Első lépésként családiháttér-változót, vagyis az anya iskolai végzettségét vegyük, három csoportba sorolva. Az első csoport a 8 osztályos vagy szakmunkás végzettségű, a második az érettségivel rendelkező, a harmadik a felsőfokú végzettségű anyákat foglalta magába. E szerint a három csoport szerint vizsgálva az adatokat a következő eredményeket kapjuk:

A három csoportra elvégezve a Levene-próbát az tapasztalható, hogy a szórások szignifikánsan eltérnek egymástól. (Levene-féle F=3,351, p=0,038). A variancia-analízist elvégezve pedig az is kiderül, hogy az átlagok is szignifikáns különbséget mutatnak (F=6,869, p=0,001). Tehát az anya iskolai végzettsége szignifikánsan meghatározza a tanulók eredményeit.

Ezek után iskolák szerint bontva az adatokat, kitűnik, hogy az 1. számú általános iskolában a legnagyobb az alacsony képzettségű édesanyák aránya (33%), míg a 8 osztályos gimnáziumban pedig a legmagasabb a felsőfokú végzettségűeké (72%). Ugyanezen kategóriákra osztva a gyerekeket a következő eredmény adódott a teszteredményekre. *(5. ábra)*



5. ábra: A teszt eredménye az anya iskolai végzettsége szerinti csoportosításban

Ebből kiderül, hogy az azonos családiháttér-változóval rendelkező gyerekek közül a 2. számú általános iskola két kategóriában is a legmagasabb eredményt érte el. Viszont az alacsony végzettségű anyák gyermekeinél ott a legrosszabb az eredmény.

További háttérváltozók vizsgálata

A kétmintás t-próbákat elvégezve az egyes háttérváltozók esetén, a minta egészére az derült ki, hogy a sejtés nem igazolódott be. Sem a tanulók neme (F=0,376 p=0,541; t=1,232 p=0,220), sem a bal-jobb kezesség (F=0,450 p=0,045; t=-0,218 p=0,829), sem a szemüveg viselés (F=5,743 p=0,018; t=0,627 p=0,532) nem befolyásolja szignifikánsan a teszt eredményét.

A háttérváltozók összefüggnek egymással, a kettő kölcsönhatása is befolyásolhatja a függő változó értékét. Ennek vizsgálatára két szempontos variancia-analízist érdemes alkalmazni. Jelen esetben a függő változónk a térszemlélet teszt eredménye. Több verzióban elvégezve a két szempontos variancia-analízist, ezekre az eredményre juthatunk:

A matematika kedvelése szignifikáns hatással van a teszt eredményére (F=3,427, p=0,011, χ2=0,105) míg a rajz kedvelése nem (F=0,517, p=0,724, χ2=0,017). A kettő együttes hatása szintén nem szignifikáns.

A matematika témakörök közül a geometriai számításokat (F=1,362, p=0,251, χ2=0,044 és a geometriai szerkesztéseket (F=2,672, p=0,035, χ2=0,082) összevetve, a szerkesztéseket jobban kedvelőknek jobb az eredményük. A kettő együtt is szignifikáns hatással van a teszt eredményére (F=0,979, p=0,472, χ2=0,090)

A nemeket és a tanulmányi átlagot tekintve a két szempontról megállapítható, hogy a tanulók neme (F=1,397, p=0,244, χ2=0,032) nincs jelentős hatással az eredményre. Viszont a tanulmányi átlag (F=0,2,226, p=0,014, χ2=0,527) hatása olyan magas (52,7%), hogy az mindkét nembeliek eredményére egyformán döntő hatással van.

Tehát a tanulmányi átlag erősen hat a térszemlélet teszt eredményére. A következő vizsgálat a tantárgyi kedvelésre vonatkozzon. Korrelációs táblázatot készítve az összpontszám és a tantárgyi kedvelések között, az eredmények azt mutatják, hogy csak néhány tárgy esetén tapasztalható szignifikáns összefüggés: matematika (0,259, p=0,002) számítástechnika (0,193; p=0,024) és kémia (0,223, p=0,006).

Összegzés

A kutatás során összehasonlítva három különböző iskolatípusban, négy iskolában, 6 osztályban tanuló gyerekek térszemléletét a következő eredményekre jutottunk.

A mérőeszköz feladatai közül a gyakorlati tapasztalatokhoz és a tananyaghoz legközelebb állók megoldása sikeresebb volt, mint az elvont gondolkodást, speciális ábrázolási tudást kívánóké. A teljes minta összeredménye azt mutatja, hogy a feladatlap nehéz volt a tanulóknak, viszont ez az eredmény megfelel a minta életkori sajátosságainak.

Az iskolatípusok viszonylatában, nagy különbség adódott az egyes típusokban tanuló diákok térszemlélete között. Eltérés fedezhető fel a családiháttér-változó szerinti összetételben is. Ha ezek alapján hasonlítjuk össze a diákok teljesítményét, már nem adódik akkora különbség az azonos családiháttér-kategóriába tartozó diákok között. Mindezek alapján megállapítható, hogy az iskolatípus nagymértékben meghatározza a tanulók téri képességeit. Azonban ez nem bizonyíték arra, hogy ez a képesség az iskolatípusnak köszönhető. A családiháttér-változókat megvizsgálva kiderül, hogy a 6 és 8 osztályos gimnáziumokban sokkal nagyobb az aránya a magasabb iskolai végzettségű szülők gyerekeinek.

Jelentős hatással van még a térszemléletre a tanulmányi átlag, és a matematika kedvelése. Viszont a várakozáshoz képest nincs rá hatással a tanuló neme, a rajz tárgy kedvelése vagy a jobb-balkezesség. Tehát lényegében nem az iskolatípus határozza meg a tanulók képességeit, hanem a tanulók azért járnak bizonyos iskolatípusokban, mert jók a képességeik.

Ha iskolák szerint vizsgáljuk az eredményeket, kiderül, hogy az azonos iskolatípuson belül lévő két iskola között is jelentős különbség mutatkozik a térszemlélet-teszt eredményében. Ennek a különbségnek az okát csak sejthetjük, mivel sok összetevő lehet a háttérben. Egyik ilyen, az iskola tanulói közötti családiháttér-különbség. A másik a sportiskolai státusz vagy akár a technika tantárgy módszertana.

Mindezek kiderítésére érdemes lenne egy felidézett kísérletet elvégezni, amelynek során egyéb iskolai dokumentumokat lehetne összehasonlítani, kielemezni. „ A felidézett kísérletet az különbözteti meg a megfigyelés módszerétől, hogy a kutatás lezárultával, utólagosan tár föl oksági összefüggéseket különböző változók között." Csíkos (2012, 27. o.) Kérdőíves vizsgálatot végezni a tanulók sport- és hobbiszokásaikkal kapcsolatosan.

Irodalomjegyzék

Bognár Cecil (1932): Térszemlélet. *Athenæum,* 5-6. Sz., 136–152.

Csíkos Csaba (2012): *Pedagógiai kísérletek kutatásmódszertana.* Budapest, Gondolat kiadó 27.

Gardnerf, H. (1983): Frames of mind: *the theory of multiple intelligences*. New York, Basic Books

Kárpáti Andrea – Gyebnár Viktória (1996): *A vizuális képességek és a személyiség.* ELTE, Neveléstudományi Tanszék, „Új Pedagógiai Közlemények" sorozat, Budapest

Séra László, Kárpáti Andrea, Gulyás János (2002)*:* A térszemlélet. *A vizuális-téri képességek pszichológiája, fejlődése, fejlesztése és mérése*. Pécs, Comenius kiadó, 19.

Séra László, Kárpáti Andrea, Gulyás János (2002): A *térszemlélet*. Tesztkönyv Pécs, Comenius kiadó

Séra, L.**,** Kurimay, D.**,** & Ocskó, T. (2005): *„Gyakorlás és tapasztalat szerepe a téri képességben sportolóknál*" Kalokagathia

JÁTSZVA TANULJUK A LINEÁRIS EGYENLETEK MEGOLDÁSÁT MÉRLEGELVVEL

Stankov Gordana

Szabadkai Műszaki Főiskola, Szerbia

Matematikatanítási munkám során gyakran szembesülök azzal a problémával, hogy tanulóink koruktól függetlenül sok hibát vétenek egyenletek megoldása közben. E nehézségek egyik lehetséges magyarázata az, hogy a tanulók gyakran fejből megtanult, érthetetlen szabályok szerint kezelik a matematikai szimbólumokat. Tanulóim tanulási gondjai ösztönöztek arra, hogy megpróbáljak kifejleszteni egy tanulási módszert, mely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy tapasztalatokat szerezve a konkrét reprezentációkkal való manipulálásból felépítsék a matematikatudásukat.

Bevezető

Az elsőéves hallgatókkal a Szabadkai Műszaki Főiskolán minden iskolaév elején felmérő tesztet íratunk matematikából. A tavalyi egyenletmegoldások közül kettőt mutatok be.

Anna megoldása: $2x-60=0$; $2x=60$; $x=\frac{60}{-2}$; $x=-30$

Milán megoldása: $2x-10=0$; $2x=10$; $x=10-2$; $x=8$

A hallgatókat később megkértem, hogy magyarázzák el a saját megoldásaikat. Anna a következőt mondta: „Először a hatvanast, aztán a kettőt átviszem a jobb oldalra és változtatom a jelet. Elosztom, és kész." Milán hasonlóan válaszolt: „Amikor a szám átmegy a másik oldalra a plusz mínusz lesz, a mínusz pedig plusz." Sajnos a hallgatók sikertelenül igyekeztek érthetetlen szabályokat alkalmazni a szimbólumok manipulálásában. Célunk a matematikatanításban nem lehet az, hogy a tanuló tudja hibátlanul az eljárást, de ne értse, hogy miért kell ily módon cselekedni. A cél csak az összefüggések megértése lehet, ahogyan Skemp (1978) nevezi: a relációs megértés. Anna és Milán esetében is megpróbáltam alkalmazni a konstruktivizmus tanulási elméletet, mely segítségével mindig sikerült elérnem a matematika relációs megértését.

Elméleti háttér

A konstruktivizmus

E tanulási elmélet szerint a tanuló nem passzív befogadója a mások által közvetítet tudásnak, hanem aktívan részt vesz a tanulásban. A tanuló a tudást saját agyában építi meg, konstruálja. (Bodner, 1986) Bár a tudás személyes és egyéni, a tanuló úgy konstruálja ezt, hogy együttműködve más emberekkel valamilyen kulturális és nyelvi környezetben kölcsönhatásba lép a fizikai világgal. (Sjoberg, 2007) A tanuló tapasztalatszerzése kulcsfontosságúak a tanulásban. Taber (2011) szerint a tudás egy iteratív folyamatban fejlődik ki, és lassan a tanuló tapasztalatai segítségével épül fel a következőképpen: összehasonlítva az új tapasztalatokat az eddigi tudása alapján megjósolt kimenetellel, a tanuló vagy bővíti a tudását az új tapasztalattal, vagy módosítja az előző tudását a tapasztalat hatására. Tobin és Tipins (1993) kihangsúlyozták, hogy a konstruktivisták szerint a tanárnak kell olyan tanulási környezetet biztosítani a tanulók számára mely könnyebbé teszi a tanulást. Ez azt jelenti, hogy lehetővé kell tenni a hallgatók számára, hogy minél több értékes tapasztalatot szerezzenek a tanulási folyamat során. Ezért konkrét reprezentációkat használtam és próbáltam ösztönözni Annát és Milánt, hogy kísérletezzenek velük a tapasztalatszerzés céljából. Megkértem őket, hogy segítsenek letesztelni két matematikai játékot.

Reprezentációk

Bruner (1966) szerint bármely tudásnak három különböző reprezentációs módja létezik:

- materiális (enaktív) sík: konkrét objektumokkal végzett megfelelő tevékenységsor általi szemléltetés,
- ikonikus sík: egy ismeretet annak teljes meghatározása nélkül jelképező összefoglaló képek, grafikonok, táblázatok, diagramok összessége,
- szimbolikus sík: szimbolikus állítások összessége.

Az egyenletek megoldásának tanítása rendszerint a szimbolikus síkon zajlik. Célunk a kipróbálandó matematikai játékokkal az, hogy a lineáris egyenletek megoldása az enaktív és az ikonikus síkon is megtörténjen.

Konkrét reprezentációk használata a lineáris egyenletek megoldásában mérlegelvvel

1. A kétkarú mérleg egyensúlyban van

Az asztalon egy valódi kétkarú mérleg állt és a színes rúd készlet. Megkértem Annát és Milánt, hogy pakoljanak néhány rudacskát a mérleg két serpenyőjébe úgy, hogy a megpakolt mérleg egyensúlyban legyen. Ezt a tényállást le kellet jegyezniük egy füzetbe. Az egyik serpenyőbe két rózsaszínű meg egy kék rúd került, a másikba pedig egy fekete. Anna csodálkozva megkérdezte: „Tényleg rajzolnunk?" De ekkor Milán már leírta a következő egyenlőséget figyelembe véve, hogy hány egységnyi hosszúak a rudak: 2+2+3=7. A kérdésemre, hogy mit jelent az „=" jel azt válaszolta, hogy a mérleg egyensúlyban van. Kértem, hogy rakják a kiskockákat és kérdeztem: „Mi történik a mérleggel

és az egyenlőséggel, ha ugyanannyi fehér kiskockát teszünk mindkét serpenyőbe (pl. 3-at) és mi ha utána ugyanannyit leveszünk (pl. 2-t) mindkét serpenyőről?" A hallgatók megfogalmazták, hogy a mérleg továbbra is egyensúlyba lesz, illetve ha az egyenlőség mindkét oldalához (oldalából) hozzáadjuk (kivonjuk) ugyanazt a számot az egyenlőség továbbra is fennáll. Leírták a megfelelő egyenlőségeket is: 2+2+3+3=7+3; 2+2+3+3–2=7+3–2. Hasonló módon a hallgatok kísérletezés után kimondták (és leírták az egyenlőségeket), hogy ha az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk (elosztjuk) ugyanazzal a nullától különböző számmal az egyenlőség továbbra is fennáll. A műveleteket a mérlegen, melyek elvégzése után a mérleg egyensúlyban marad, megengedett műveleteknek neveztük el.

Most a mérleg bal serpenyőjébe három batyut (a batyut szalvétába kötött kockák alkották) meg egy fehér kiskockát tettem, a jobb serpenyőjébe egy batyu meg öt fehér kiskocka került. A feladat a következő volt: Ha egy kocka az egyes számot jeleníti meg, az ismeretlen számot pedig a batyu, írja le azt az egyenletet, mely meg van jelenítve a mérleg segítségével. Anna leírta az egyenletet: $3x+1=x+5$. A batyukkal való kísérletezés után a hallgatók megfogalmazták, hogy ***ha az egyenlet mindkét oldalához (oldalából) hozzáadjuk (kivonjuk) ugyanazt az algebrai kifejezést az egyenlőség továbbra is fennáll.***

2. „Mérd ki" a batyut!

A mérlegen újból reprezentáltuk az egyenletünket és elhangzott a következő feladat: Kiindulva a mérleg állásából, a mérlegen csak megengedet tevékenységeket végezve, „mérje ki" a batyut és matematikai jelekkel jegyezzen le minden lépést! (Kimérni azt jelenti, hogy az egyensúlyban levő mérleg egyik serpenyőjében, csak egy batyu áll, a másikban pedig csak kiskockák találhatók.) A hallgatók a következőket „mérték ki": $3x+1=x+5$; $3x+1-1=x+5-1$, illetve $3x=x+4$; $3x-x=x+4-x$, vagyis $2x=4$; $2x/2=4/2$ vagy $x=2$. A mérlegnek köszönhetően nem jutott eszükbe se osztani -2-vel, se kivonni a 2-t az egyenlet mindkét oldalából, ahogyan a felmérőn tették.

3. Amit a mérleg nem tud, „megmondják" a kártyák

A 2x+(–3)=x+1 egyenlet reprezentálására „kártyákat" használtunk. A világos téglalap jelentette az egyest, a sötét pedig a mínusz egyet. Napocskát rajzoltunk a lapra és ez jelentette az ismeretlen számot. A hallgatók a következő lépésekből álló megoldást adták meg:

☼☼☼☼☼ = ☼☼	$2x+(-3)=x+1$
☼☼☼☼☼ = ☼☼ ☼☼☼ ☼☼☼	$2x+(-3)+3=x+1+3$
☼☼ = ☼☼☼☼☼	$2x=x+4$
☼ = ☼☼☼☼	$2x-x=x+4-x$, illetve $2x=4$

A hallgatók hasznosnak és érdekesnek vélték az eszközökkel való „játékokat". Szerintük az általános iskolások élvezni fogják az ilyen fajta tanulást. Fontos megjegyezni, hogy Anna és Milán a pótdolgozaton hibátlanul oldották meg az egyenleteket.

Konklúzió

Anna és Milán példája azt mutatja, hogy a főiskolai hallgatók egyenletmegoldásának tanulásában sokat segít a konkrét reprezentációk használata. A kísérletezések után a hallgatók felfedezték azokat a műveleteket a mérlegen, melyek elvégzése után a mérleg egyensúlyban marad. Mivel minden egyes elvégzett lépést a materiális síkon követett egy megfelelő lépés a szimbolikus síkon is, a hallgatók könnyen meghatározták azokat a transzformációkat az egyenleten melyek elvégzése után az egyenlőség továbbra is fennáll. Az egyenletmegoldás mérlegelvvel, a valódi objektumokkal végzett tevékenységsorozatként (batyu kiméréseként és az ismeretlen szám kártyákkal való meghatározásaként) volt szemléltetve. A hallgatók ezt a tevékenységsorozatot önállóan határozták meg és teljesen érthető volt számukra. Ennek következménye képen az egyenletmegoldás mérlegelvvel a szimbolikus síkon is érthetővé vált számukra. Ezután az eszközök használata nélkül is képesek voltak megoldani az egyenleteket.

Irodalomjegyzék

Bordner, G. M. (1986): Constructivism the theory of knowledge. *Journal of Chemical Education*, 65, 873–878.

Bruner, J. S. (1966): *Towards a Theory of Instruction* (pp. 485–490). Harvard University Press.

Sjoberg, S. (2010): Constructivism and learning. In: Baker, E.; McGaw, B. & Peterson P (Eds), *International encyclopaedia of education*, 3rd Edition (pp. 44–45). Elsevier. Oxford.

Skemp, R. (1978): Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26 (3), 9–15.

Stankov, G. (2008): *Konkrét és képi reprezentációk használata a hetedik osztályos algebratanításban*. PhD-értekezés. Debreceni Egyetem. Debrecen.

Taber, K.S. (2011): Constructivism as educational theory: contingency in learning, and optimally guided instruction. In: Hassaskhan J. (Ed), *Educational theory* (pp. 39–61). Nova Science Publishers. Hauppauge. New York.

Tobin K. and Tippins D. (1993): Constructivism as a Referent for Teaching and Learning. In: Tobin K. (Ed), *The Practice of Constructivism in Science Education* (pp. 3–22). Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale. New Jersey.

We Learn Solving Linear Equations by Playing Games

„GONDOLOD, HOGY IGAZ? VAGY MÉGSE?”

TEVÉKENYKEDTETŐ GEOMETRIAI PROBLÉMÁK TANÍTÓKNAK

Krisztin Német István

SZTE JGYPK TÓKI Matematika Szakcsoport

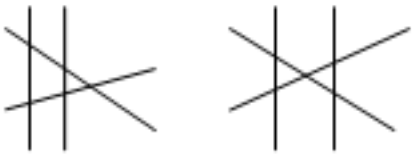
A tanárképzésből átkerülve a tanítóképzésbe, szembesültem azzal a problémával (is), hogy sokkal nehezebb lett eredményt elérni olyan fontos matematikai képességek fejlesztésénél, kialakításánál, mint pl. egy probléma részekre bontása és rész-kérdések megfogalmazása, sejtés megfogalmazása és a bizonyítás igénylése, lehetséges esetek elkülönítése és pontos, rendszerszerű felsorolása, megfelelő térszemlélet. Ekkoriban hallottam Szendrei Julianna egyik előadásában a „Hajtogassunk szabályos háromszöget A4-es papírlapból!” feladatról, amit a bizonyítással kapcsolatban mutatott be. E példa nyomán igyekszem keresni és alkalmazni ilyen motiváló erejű, tevékenykedtető módon felvetett geometriai problémákat, amelyek elég rövidek és könnyűek ahhoz, hogy a siker reményével vághassunk bele megoldásukba, de azért nem is triviálisak, ami komolytalanná tenné a munkát. Előadásomban ilyen feladatokat mutatok be, eddigi tapasztalataimmal együtt: 2, 3, 4, 5 db egyenes metszés-párhuzamosság szerinti felvételi lehetőségei a síkon; háromszög csúcsai körüli, egymáshoz csatlakozó körívek záródása; 12 kerületű és egész szám területű sokszögek kirakása gyufaszálakból; konvex négyszög átdarabolása paralelogrammába; szabályos háromszög- és négyzetlapokból álló gúla-, ill. hasábfelület síkba terítési lehetőségei; pontok távolsága négyzetes oszlopon.

A tanárképzésből átkerülve a tanítóképzésbe, szembesültem azzal a problémával (is), hogy sokkal nehezebb lett eredményt elérni olyan fontos matematikai képességek fejlesztésénél, kialakításánál, mint pl. egy probléma részekre bontása és rész-kérdések megfogalmazása, sejtés megfogalmazása és a bizonyítás igénylése, lehetséges esetek elkülönítése és pontos, rendszerszerű felsorolása, megfelelő térszemlélet. Ekkoriban hallottam Szendrei Julianna egyik előadásában a bizonyítással kapcsolatban a „Hajtogassunk szabályos háromszöget A4 papírlapból!” feladatot. E példa nyomán igyekszem keresni és alkalmazni ilyen motiváló erejű, tevékenykedtető módon felvetett geometriai problémákat, amelyek elég rövidek és könnyűek ahhoz, hogy a siker reményével vághassunk bele megoldásukba, de azért nem is triviálisak, ami komolytalanná tenné a munkát. Előadásomban ilyen feladatokat mutatok be, eddigi tapasztalataimmal együtt.

Alapképzéses hallgatóknál a „Térszemlélet fejlesztése” kurzuson, műveltségterületes hallgatóknál a „Geometria” kurzusokon foglalkozunk e feladatokkal.

2, 3, 4, 5 db egyenes metszés-párhuzamosság szerinti felvételi lehetőségei a síkon

Hányféleképpen vehetünk fel a síkon 2, 3, 4 db egyenest metszés és párhuzamosság szerint? 2, ill. 3 egyenes esetén ritkán van probléma: általában mindenki megtalálja a 2, ill. 4 felvételi lehetőséget. 4 egyenesnél már vannak gondok: több hallgató különbözőnek vél azonos eseteket (pl. az 1. ábrán levőket), ill. csak a közös megoldás során látja meg mind a 8 különböző felvételi lehetőséget. Mint kiderül, általában az okozza a hiányos megoldást, hogy nem valamilyen rendszer szerint rajzolják a különböző helyzeteket, hanem „össze-vissza”, és így persze kihagynak lehetőségeket.



1. ábra

Ezek után áttekintjük a három feladat eredményét: 2 egyenes esetén 2, 3 egyenes esetén 4, 4 egyenes esetén pedig 8 felvételi lehetőség van. Ekkor adom fel házi feladatnak 5 egyenes esetét. Persze, sokan azonnal mondják, hogy szerintük 16 felvételi lehetőség lesz. Nem árulom el, hogy rossz a tippjük, hiszen 18 lehetőség van. Csak azt kérem, próbálják otthon lerajzolni az összest. Aztán a következő órára kiderül, hogy gond van: a legtöbb hallgatónak csak 10-13 lehetőséget sikerül rajzolni, továbbá elég sokszor fordul elő, hogy különbözőnek vélnek azonos eseteket. Kevesen vannak, akik 15-nél több különböző lehetőséget tudnak felsorolni, és egy-két hallgató volt csak, aki megtalálta mind a 18-at. Különösen érdekes volt az az eset, amikor egy nagyon jó képességű hallgató 17 különböző lehetőségig jutott el, és ott megállt. Azt írta a végére, hogy „valami baj van”: „tudjuk”, hogy 16 lehetőség van, Ő pedig már 17 olyat talált, ami biztosan különböző, mert többször is ellenőrizte.

12 kerületű és egész szám területű sokszögek alkotása

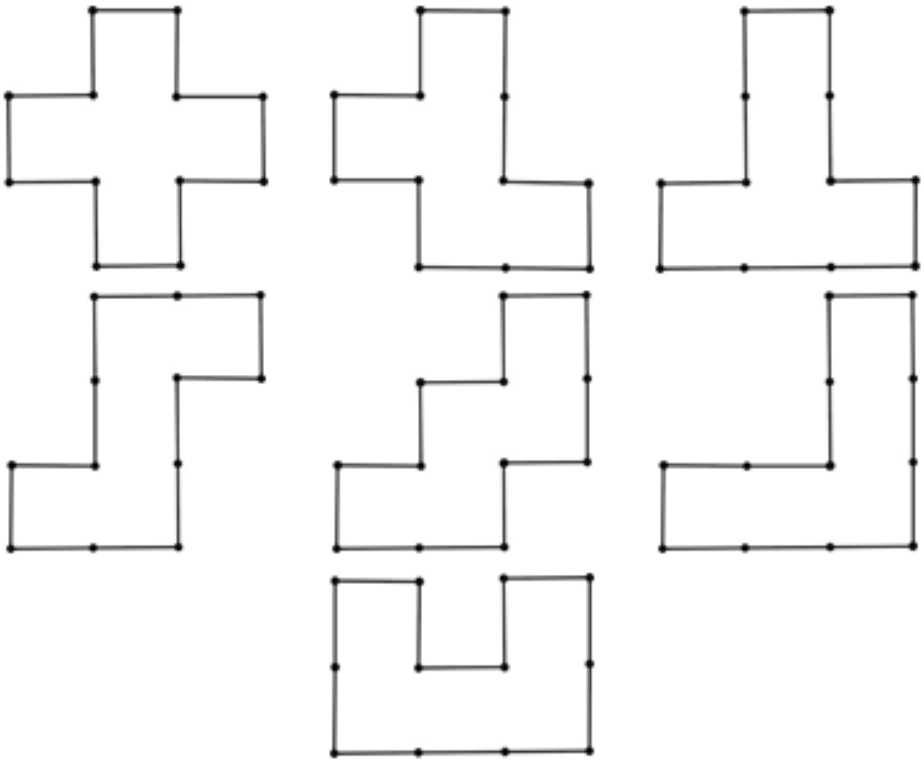
12 db egybevágó szakaszból („gyufaszálból”) alkossunk olyan sokszögvonalat, hogy ha hosszegységnek az adott szakaszokat tekintjük, akkor a keletkező sokszög kerülete 12, területe pedig egész szám legyen. Rögzítjük a szabályokat: a szakaszokat egymás után illesztve egész szám hosszúságú szakaszokat hozhatunk létre; ilyen szakaszokból derékszög szárakat, továbbá háromszöget alakíthatunk ki; azokat a megoldásokat tekintjük különbözőknek, amelyek nem egybevágók.

Az irodalomban több helyen előfordul e feladat (pl. [2], [5], [6]); általában a nehezebb megoldásokra kérdeznek rá, például, hogy a sokszög területe 4 legyen. Én megelégszem

azzal, ha a hallgatók megtalálják az olyanokat, ahol a szomszédos oldalak merőlegesek egymásra. Kezdésként rákérdezek, hogy mely sokszögeknek a „legkönnyebb" meghatározni a területét. A hallgatók először a négyzetet, majd a téglalapot mondják. Az első feladat tehát az, hogy ilyen sokszögeket alkossunk, és találjuk meg az összes lehetőséget. Ezt elég hamar megoldják a hallgatók: kapjuk a 3 egység oldalú négyzetet, a 2×4-es, valamint az 1×5-ös téglalapokat; területeik rendre 9, 8, 5.

A következő kérdés: hogyan lehet ezeket „viszonylag egyszerűen" átalakítani úgy, hogy kerületük ne változzon, területük pedig egész szám maradjon? Mindig van valaki, aki gyorsan felveti, hogy a 3 egység oldalú négyzet „egyik sarkát hajtsuk be", vagyis a 90° belső szög helyén alakítsunk ki 270° belső szöget. Így a terület 8-ra csökken. Azonnal mondják, hogy ilyen módon még 7, 6 és 5 területű sokszöget is kialakíthatunk. Ekkor az a feladat, hogy keressük meg az összes ilyen módon keletkező, egész területű sokszöget.

8 területűből csak 1 van, 7 területűből már 3, 6 területűből pedig 4. Ezeknél nem mondom meg előre, hány lehetőség van; az összes eset megtalálása általában nem okoz gondot; esetleg a 6 területűeknél fordul elő 1–1 hiányzó eset néhány hallgatónál. Az 5 területűek keresése előtt viszont megmondom, hogy 7 lehetőség van (2. ábra), mert tapasztalatom szerint elég nehezen találják meg az összest. Különösen az utolsónak felsorolt eset észrevétele bizonyul nehéznek.

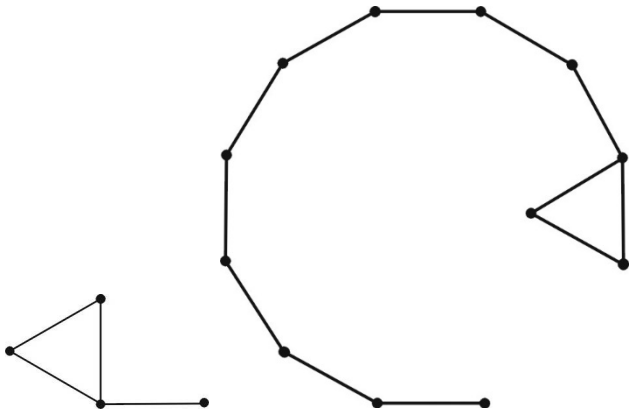


2. ábra

Ezek után a 2×4-es téglalapból hasonló módon kialakítható lehetőségek következnek. Összesen 7 keletkezik: 7 területűből 1, továbbá 6 és 5 területűből is 3. Az előző esetek tanulságai lapján ezek általában elég hamar mind megvannak, bár több hallgató itt már elveszíti érdeklődését a feladat iránt.

A továbbiakban persze előkerül a 3-4-5 oldalú derékszögű háromszög, és a 2×4-es téglalapból kialakítható „rakéta” is (3. ábra), de ezekhez komoly segítség kell. A maximális területű sokszögre, a szabályos tizenkétszögre is kitérünk, aminek ugyan nem egész szám a területe, de érdekes, ahogy megalkotjuk. Egy szöge 150˚=90˚+60˚, ezt általában kirakják a hallgatók (4. ábra).

3. ábra



4. ábra

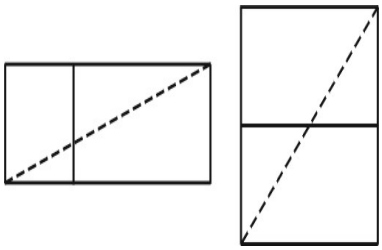
Szabályos háromszög- és négyzetlapokból álló gúla-, ill. hasábfelület síkba terítései

Ezt a problémát is a lehetséges esetek pontos felsorolásának gyakorlására szoktam felhasználni: hányféle gúla-, ill. hasábfelület alkotható szabályos háromszög- vagy négyzetlapokból, és ezek hálója hányféleképpen teríthető síkba? Kezdésként meg kell állapítani, milyen felületek jöhetnek így létre. Először a kocka és a szabályos tetraéder kerül elő. Ezek esete ismert a hallgatók előtt: korábbi matematikai kurzuson már találkoztak ezek hálóival.

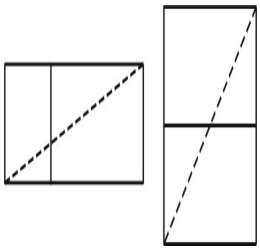
Majd kiderül, hogy még kétféle van: az a gúla, melynek alapja négyzet, oldallapjai pedig szabályos háromszögek; és az a hasáb, melynek alapjai szabályos háromszögek, oldallapjai pedig négyzetek. Az első eset kiterítési lehetőségeit órán szoktuk megkeresni, a másodiké házi feladat. Először a kiterítések számának nagyságrendjét próbáljuk megadni: a kocka 11 lehetőségéhez viszonyítunk. A többség mindkét esetre azt mondja, 11-nél kevesebb lehetőség van, mert mindkettőnek kevesebb lapja van, mint a kockának. Ezután megpróbálják a gúla hálóit lerajzolni. Az átlagos képességű hallgatók 5–6 esetig jutnak el, a jobbak megtalálják mind a 8 lehetőséget. A hasáb esetében is hasonlók az eredmények, egy eltéréssel: a jók közül is többen megállnak 8-nál, mondván, ennyi volt a gúlánál is; csak azok kapják meg mind 9 lehetőséget, akik következetesen végigvisznek valamilyen rendszert.

Pontok távolsága négyzetes oszlop felületén

Egy test felületén levő pontok felületi távolságának meghatározása az irodalom sok feladatában szerepel (pl. [1], [3], [4], [5], [7]); általában kocka, téglatest, henger, kúp az adott test. Mi olyan négyzetes oszlopból indulunk ki, melynek alapja 2 egység oldalú négyzet, magassága pedig 4 egység. Legyen P és Q az egyik testátló két végpontja. Kérdés, mekkora e két pont távolsága a hasáb felületén mérve? A hallgatók első tippje általában egy él és egy lapátló összege; ezekből kétféle van: $4+\sqrt{8}=6{,}83$ és $2+\sqrt{20}=6{,}47$ a hosszuk. Ha már van kétféle út, felmerül a kérdés, nincs-e még rövidebb? Ekkor eszükbe jut a kiterítés, először általában az 5. ábrán levő. Ezen észreveszik, hogy a két eddiginél van rövidebb út: a kapott 2×6-os téglalap átlója, aminek hossza $\sqrt{40}=6{,}32$. Általában úgy gondolják, ennél nincs rövidebb, csak biztatásra keresnek további lehetőséget. Ekkor megtalálják a 6. ábrán látható lehetőséget, amin újabb átlós összekötési lehetőség van: ennek hossza $\sqrt{32}=5{,}66$, rövidebb az eddigieknél.

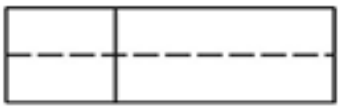


5 ábra

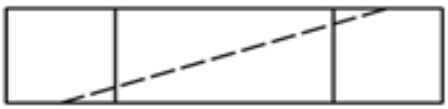


6 ábra

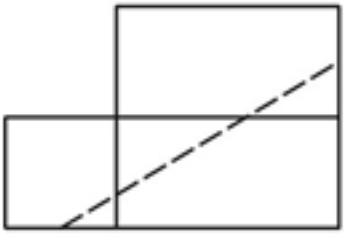
A két pont módosításával nehezíthetjük is a feladatot: *P* és *Q* legyen most a hasáb két szemközti négyzetélének felezőpontja. Most már azonnal kiterítésre gondolnak, és a kérdéses távolságra nyilván a 6 az első javaslat. (7. ábra) De az előző feladat tanulságai lapján tovább keresnek, és általában meg is találják a 8. és 9. ábra lehetőségeit. Érdekes módon az utolsó lehetőség, a 10. ábra kiterítése önállóan ritkán kerül elő, és a hallgatók meglepődnek, hogy ez adja a feladat megoldását. A 8–10. ábrákon szereplő szakaszok hosszai rendre $\sqrt{40}=6{,}32$; $\sqrt{34}=5{,}83$; $\sqrt{32}=5{,}66$.



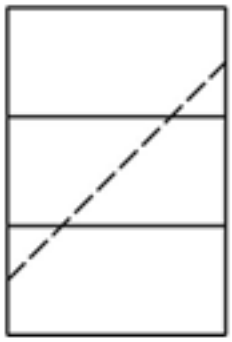
7. ábra



8. ábra



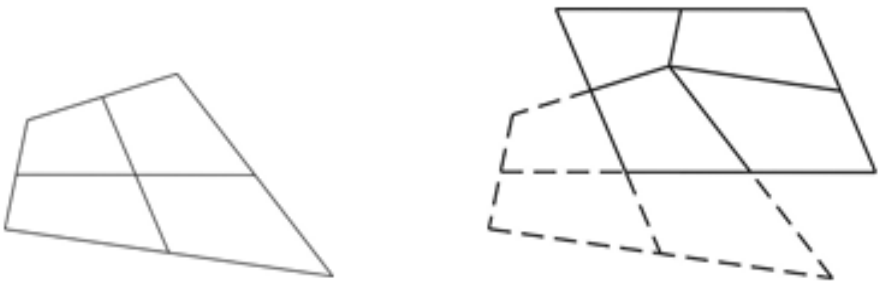
9. ábra



10. ábra

Konvex négyszög átdarabolása paralelogrammába

Ezt a feladatot – és a következőt is – inkább csak a matematika műveltségi területes hallgatóknál próbálom feldolgozni, alapképzéses hallgatóknál kisebb a sikerélményem vele. Azt az ismert feladatot dolgozzuk fel, hogy konvex, egyébként tetszőleges négyszögből hogyan alakíthatunk ki paralelogrammát (pl. [7]). (11. ábra)



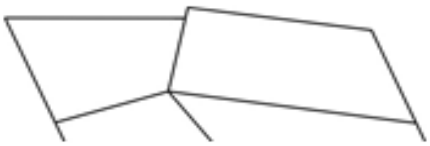
11. ábra

A kiindulás az, hogy középvonalai mentén vágjunk fel egy konvex négyszöget, és próbáljunk valamilyen „nevezetes” négyszöget kirakni a darabokból. A próbálkozások során viszonylag hamar megfogalmazódik a „Paralelogramma lesz a darabokból.” sejtés. Az igazolás kezdetekor a hallgatók kimondatlanul feltételezik, hogy a kapott alakzat egy négyszög, és azonnal a szemközti oldalak egyenlőségét vagy párhuzamosságát nézik. Fel kell hívnom a figyelmüket, hogy a kapott alakzat négyszög voltát is vizsgálni kell. Ez a kérdés meglepi őket, és megválaszolása a feladat nehezebbik része, mert több részprobléma is van. E problémáknak az észrevétele és megfogalmazása a lényeg, a megoldásuk

már könnyebben megy. A feladatnak ez az összetettsége az, ami miatt nehezebben boldogulnak vele.

A lehetséges „hibalehetőségek" kiderítésével kezdjük. Tapasztalataim szerint nem az „elméletileg indokolt" sorrendben kerülnek elő a lehetséges problémák: nem az alakzat közepén levő szögektől indulnak az oldalak felé, hanem fordítva. Először az jut eszébe valakinek, hogy a keletkezett alakzat azért nem négyszög, mert esetleg „törés" alakult ki az oldalán (12. ábra). További gondolkodás után azzal folytatja valaki – általában ugyanaz, aki a „törést" mondta –, hogy esetleg „eltolódás" is előfordulhat (13. ábra).

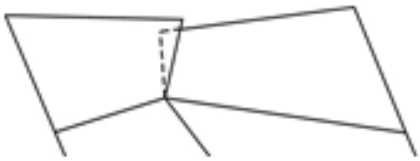
12. ábra



13. ábra

Ezután mondja valaki, hogy „középen" esetleg „hiány" lehet (14. ábra) Legvégül kerül elő, hogy e szögeknél esetleg „átfedés" alakulhat ki (15. ábra).

14. ábra



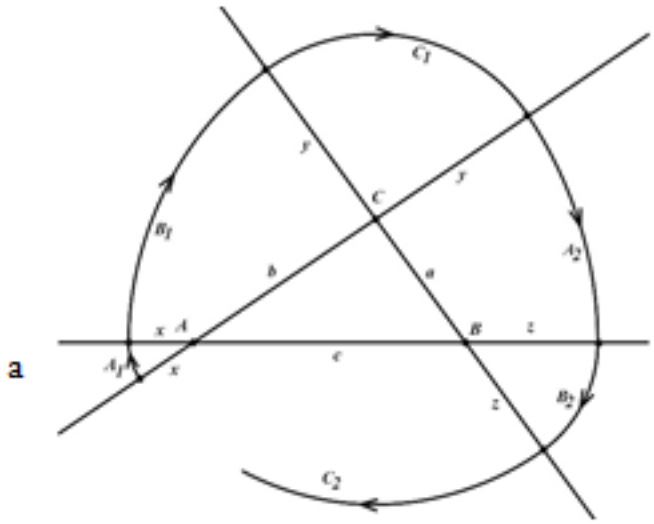
15. ábra

Visszafelé haladva az előző sorrenden, most már többen mondják, hogy az átfedés és a hiány kizárásához az kell, hogy a vizsgált szögek összege teljesszög legyen. És látják is, hogy ezek az eredeti négyszög belső szögei voltak, így összegük 360°. Másodszor: az „eltolódás" lehetetlenségéhez észreveszik, hogy a kérdéses szakaszok eredetileg egy oldal felei voltak, tehát egyenlők. Harmadszor: „törés" azért nincs, mert az ott egymás mellé kerülő szögek eredetileg is egymás mellett voltak úgy, hogy együtt egyenesszöget alkottak.

Ha ez megvan, a négyszög paralelogramma voltának indoklása már sokkal könnyebben megy. Problémát az okoz, hogy a szemközti oldalakat kezdik általában vizsgálni. Ekkor arra figyelmeztetem őket, semmilyen, oldalra vonatkozó információnk nincs. Ezzel irányíthatjuk vissza a figyelmet a szögekre. Az új négyszög szemközti szögei az eredeti négyszög középvonalainak metszéspontjánál csúcsszögek voltak, amik egyenlők.

Háromszög csúcsai körüli, egymáshoz csatlakozó körívek záródása

A 16. ábrán az ABC háromszög A csúcsa körül, tetszőleges x sugárral, az óramutató járásával megegyező irányban megrajzoljuk a két oldalegyenes közé az A1 körívet, a háromszögön kívülre. Majd ennek végpontjából indulva, ugyanolyan irányban haladva megrajzoljuk a B1 körívet a B csúcs körül. Kérdés, hogy az eljárást folytatva, a végén kapott C2 ív ugyanott végződik-e, ahonnan az A1 ív indult? Megszerkesztve az alakzatot, a sejtés az, hogy igen.



16. ábra

Ezzel a feladattal kevesen boldogulnak, aminek okát abban látom, hogy a hallgatók nehezen kezelik a formalizmusokat. Itt ugyanis jelöléseket kell bevezetni, paraméterekkel kell számolni. Én arra a meg-oldásra számítottam, hogy a hallgatók elnevezik a háromszög oldalait és a másik két „kis” sugarat, majd ezek segítségével írják fel a B1 és A2 ívek sugarainak egyenlőségét ($c+x=a+y$ és $b+y=c+z$), továbbá a C2 ív sugarának és a vele egyenlőnek gondolt szakasznak a hosszát ($a+z$ *és* $b+x$).

Nehézségre ott számítottam, hogy a két egyenlőségből hogyan hozzák ki a harmadikat: ugyanis a két egyenlőség megfelelő oldalait össze kell adni, és rendezés után kapjuk, a kérdéses szakaszok egyenlőségét. Mást tapasztaltam: aki megoldja, az x-en kívül csak az oldalakra vezet be jelölést. Így $B1$ sugara $c+x$, $C1$ sugara $c+x-a$, $A2$ sugara $c+x-a+b$, $B2$ sugara $c+x-a+b-c$, végül $C2$ sugara $c+x-a+b-c+a$. A sejtés igazolásához most azt kell kideríteni, hogy ez az utolsó sugár egyenlő-e b+x-szel. Könnyű összevonás adja, hogy $c+x-a+b-c+a=b+x$. Vagyis a vége egyszerűbb, mint az első megoldásban, de volt, aki azért adta fel, mert „belekeveredett” a menet közbeni, bonyolultabb kifejezésekbe.

A feladathoz további kérdések is kapcsolhatók. Lehet-e az íveknek a fentitől eltérő „lefutása”? A köríveknek mennyi a fokokban mért összege? (Ez utóbbi az eredeti feladat: [6].)

Irodalomjegyzék

Bonifert Domonkos (1982): *Néhány tipikus problémaszituáció matematikából*, Mozaik Kiadó, Szeged

Görke, L. – Ilgner, K. – Lorenz, G. – Pietzsch, G. – Rehm, M. (1974): S*éta a matematika birodalmában*, Műszaki Kiadó, Budapest

Hódi Endre (szerk.) (1999): *Matematikai mozaik*, Typotex Kiadó, Budapest

Ignatyev, J. I. (1982): *A találékonyság birodalmában*, Tankönyvkiadó, Budapest

Imrecze Zoltánné – Reiman István – Urbán János (1986): *Fejtörő feladatok felsősöknek*, Tankönyvkiadó, Budapest

Jacobs, H. R. (2003): Geometry – Seeing, *Doing, Understanding*, Freeman, New York

Kárteszi Ferenc (1966): *Szemléletes geometria*, Gondolat Kiadó, Budapest

Szendrei Julianna

publikációi

Könyv

Radnai Gyuláné Szendrei Julianna (1976, 1980, 1984, 1987): *A játék matematikája.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna (1977, 1981, 1985, 1988.). *Kivi és Apó*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna (1988): *Matek-játék*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna (1989): *Szakközépiskolai versenyfeladatok mindenkinek.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna (1991): *Kristályformák*. Pergamen Kiadó, Budapest.

Radnainé dr. Szendrei Julianna – Makara Ágnes – Mátyásné Kokovay Jolán – Pálfy Sándor (1994): *Tanulási nehézségek a matematikában*. IFA-BTF-MKM, Budapest.

C. Neményi Eszter – Radnainé dr. Szendrei Julianna et al. (1998): *Matematika Mindenkinek. Differenciált matematika-feladatrendszer az iskolakezdőknek*. BTF, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna (2001): *Kristályformák I.* Matematika Tanári Kincsestár, Raabe Kiadó, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna et al. (2001): *Kapcsos könyv a matematika differenciált tanításához-tanulásához.* Országos Közoktatási Intézet, Budapest.

C. Neményi Eszter – Radnainé dr. Szendrei Julianna (2001): *Matematikai füveskönyv a differenciálásról (Differenciálás a matematikatanításban)*, ELTE TÓFK Neveléstudományi Tanszék sorozata, Differenciáló Pedagógia. OKKER, Budapest.

Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról.* TYPOTEX Kiadó, Budapest.

Tankönyv, szakköri munkafüzet

Csahóczi Erzsébet – Halmos Istvánné – Radnainé Szendrei Julianna – Varga Katalin (1978): *Munkalapok az általános iskola 5. osztálya számára*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Csahóczi Erzsébet – Halmos Istvánné – Radnainé Szendrei Julianna – Varga Katalin (1979): *Munkalapok az általános iskola 6. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Csahóczi Erzsébet – Halmos Istvánné – Novák Lászlóné – Radnainé Szendrei Julianna – Varga Katalin (1981): *Munkalapok az általános iskola 7. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter – Halmos Istvánné – Radnainé Szendrei Julianna – Varga Tamás (1981): *Munkalapok az általános iskola 4. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter – Radnainé Szendrei Julianna (1981): *Munkalapok és feladatlapok a TIT Kis Matematikusok Baráti Köre 3. osztályai számára*. Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, Budapest.

C. Neményi Eszter, Radnainé Szendrei Julianna (1981): *Munkalapok és feladatlapok a TIT Kis Matematikusok Baráti Köre 4. osztályai számára.* Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, Budapest.

Tantervi útmutató, tanítói, tanári kézikönyv

C. Neményi Eszter – Ill Mártonné – Radnainé Szendrei Julianna (1978): *Kézikönyv a matematika 4. osztályos anyagának tanításához.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Kovács Csongorné – Radnainé Szendrei Julianna – Sztrókayné Földvári Vera (1979): *Kézikönyv az általános iskolai 5. osztályos matematika-tanterv tanításához.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna – Varga Tamás (1979): *Tantervi útmutató az általános iskolai matematika tanterv 6. osztályos anyagának tanításához.* Tankönyvkiadó Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna – Varga Tamás (1980): *Tantervi útmutató az általános iskolai matematika tanterv 7. osztályos anyagának tanításához.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Hámori Miklós – Kovács Zoltán – Radnainé Szendrei Julianna – Szálka Györgyné – Varga Tamás (1980, 1981, 1983, 1985): *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Kovács Csongorné – Radnainé Szendrei Julianna – Szeredi Éva – Sztrókayné Földvári Vera (1980, 1984): *Kézikönyv az általános iskolai 6. osztályos matematika-tanterv tanításához.* Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter – Radnainé Szendrei Julianna (1981): *Kézikönyv a TIT Kis Matematikusok Baráti Köre 3–4. osztályos tanárai számára.* Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna – Varga Tamás (1981): *Tantervi útmutató az általános iskolai matematika tanterv 8. osztályos anyagának tanításához.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Könyvfejezet

Radnainé Szendrei Julianna (1996): Geometria. In: Beliczky et al.: *Matematika. Feladatgyűjtemény az általános képzéshez a tanítóképző főiskolák számára.* 92–99, 226–250. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Julianna Szendrei (1996): Concrete Materials in the Classroom A. J. Bishop et al.(eds). *International Handbook of Mathematics Education.* 411–434. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Julianna Szendrei–Radnai – Judit Török (2007): The Tradition and Role of Proof in Mathematics Education in Hungary, In: Paolo Boero ed.: *Theorems in School.* 117–134. Sense Publishers, Rotterdam.

Tanulmány (kötetben)

Radnai–Szendrei, Julianna (1977): *Tentative d'evaluation de certains effcte d'un nouveau programme de mathematique*, Compte rendu de la 29e rencontre internationale de la CIEAEM tenue a Lausanne, 95–105. CIEAEM 29, Lausanne.

Szendrei Julianna (1988): Timi és a matematika. In: Kereszty Zsuzsa, Pólya Zoltán (szerk.): *Csenyéte. Antológia* 1998. 295–296. Csenyéte város Önkormányzata, Csenyéte.

Szendrei Julianna (1990): „Some aspects of teaching stochastics in Hungary" Vol. 2, pp 262–283. in Wirchup, I. ; Stocit, R. (Eds) *Developments in School Mathematics around the World.* Reston VA: NCTM

Julianna Radnai–Szendrei (1996): *Is Mathematics Education Independent of Social and Political Changes?* Mathematics Education and Common Sense. CIEAEM 47 proceedings. 47–52. Freie Universität Berlin, Berlin.

Radnainé Szendrei Julianna (1996). *A geometria tanításának lehetőségei a tanítóképző főiskolán.* Tantárgypedagógiai kutatások. 206–212. Eötvös József Tanítóképző Főiskola, Baja.

Radnainé Szendrei Julianna (1996): Néhány gondolat a differenciálás a matematika tanulásban-tanításban témához. In: Gereben Ferencné, Kereszty Zsuzsa (szerk.): *Különböznek. Differenciálás kisiskolás korban.* 201–226. Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest.

Boero, P. & Szendrei, J. (1997): Research and Results in Mathematics Education. In: J. Kilpatrick & A. Sierpinska (eds.): *Mathematics Education as a Research Domain.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Paolo Boero & Julianna Radnai Szendrei (1998): Research and Results in Mathematics Education: Some Contradictory Aspects. In: Sierpinska, A. and Kilpatrick, J (eds.): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity.* 197–212. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.

Radnainé Szendrei Julianna (1999): A Kis Professzor – a „Little Professor". In: *MaTeK Matematika Texas Kalkulátorokkal.* 1. évf. 1. szám. 3–4. Texas Instruments, Budapest.

Julianna Szendrei, Fred Goffree, Hélia Oliviera, Maria de Lurdes Serrazina (1999): Good practice. In: *European Research in Mathematics Education I.* 149–169. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück.

Julianna Szendrei (2000): The difficulties of vocational school students in problem solving *PME 24th (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education) Volume 1.*

Radnainé dr. Szendrei Julianna (2001): Az anyanyelv és a matematikatanítás kapcsolata. In: Radnainé dr. Szendrei Julianna (szerk.): *Ezredforduló, műveltségkép, kisgyermekkori nevelés.* ELTE Tanító- és Óvóképző Főiskolai Kara. 246–269. Trezor Kiadó, Budapest.

Julianna Szendrei (2001): Effects of pre-service teaching practice on teacher-students' evaluation of problem solving strategies. *PME 25th (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education) 2001.* Volume 1. 371. Utrecht University, Utrecht.

Radnainé dr. Szendrei Julianna – Török Judit (2004): Az önreflexió szerepe és megoldási lehetőségei az egyéni fejlesztésben. In: *A tanítás jobbításáért, Párhuzamos utak, párhuzamos tankönyvek a matematika tanításában.* 39–68. Haxel Kiadó, Budapest.

Groves, S., Doig, B. and Szendrei, J. (2006) Talking across cultures: an international study of young children's mathematical explanations, CIEAEM 58 Congress: *Changes in society: a challenge for mathematics education*, pp. 259–264, CIEAEM, Srni, Czech Republic

Julianna Szendrei (2007): *When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary*, 1970–2007: research and theory, practice and politics. ZDM, Volume 59. No 5–6. 443–458. Springer Berlin, Heidelberg

Julianna Szendrei (2007): Kun meno käy kovaksi, kovat pistävät menoksi. Ongelmanratkaisua Unkarissa 1970–2077: tutkimuasta ja teoriaa, käytäntöä ja politikkaa In: Tikkanen, P. ed.: Yhdessä, 2010, Itä-Helsingin Monistus Oy, Helsinki

Egyéb önálló kötet

Szendrei Julianna – Móri László (1989): *Híres matematikai játékok* (szoftver és kézikönyv). Országos Pedagógiai Intézet, Budapest.

Szendrei Julianna (1990): *Decimals by Chance* (Program és tanári kézikönyv). Sunburst, New York.

Szendrei Julianna (1990): *Digits by Chance* (Program és tanári kézikönyv). Sunburst, New York.

Szendrei Julianna (1990): *Fractions by Chance* (Program és tanári kézikönyv). Sunburst, New York.

Szendrei Julianna (1993): *Ghost in the Bottle* (Program és tanári kézikönyv). Wings for Learning, Santa Cruz.

Szendrei Julianna – Radnai Márton (1995): *Quadrominoes* (Program és tanári kézikönyv). Sunburst, New York.

Könyvfejezet

Julianna Szendrei: *When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary*, 1970–2007: research and theory, practice and politics, ZDM, Volume 59. No 5–6. Heidelberg, Springer Berlin, 2007. 443–458.

Julianna Szendrei–Radnai – Judit Török: The Tradition and Role of Proof in Mathematics Education in Hungary. In: Paolo Boero ed.: *Theorems in School.* Rotterdam, Sense Publishers, 2007. 117–134.

Szendrei Julianna – Szendrei Mária: A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai In: Csapó Benő – Szendrei Mária szerk.: *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléshez* (2011) Nemzeti Tankönyvkiadó

Csíkos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné, Makara Ágnes, Szendrei Julianna, Szitányi Judit és Zsinkó Erzsébet: Részletes tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez In: Csapó Benő – Szendrei Mária szerk.: *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléshez* (2011) Nemzeti Tankönyvkiadó

Lektorált tanulmány

Radnainé Szendrei J.(1983): A matematika-vizsgálat. In: *Pedagógiai Szemle.* XXXII. évf. 2. 151–157.

Radnainé Szendrei, J. – Haberman, G. M. (1984): A tantervi eltérések hatása a IV. osztályos középiskolások matematikai teljesítményében. In: *Pedagógiai Szemle.* XXXIII. évf. 2. 130–143.

Szendrei, Julianna (1989): Teaching Statistics, Parallels. In: *Mathematics Teaching* 128. 20–22.

Radnainé Szendrei Julianna (1996): Az alsó tagozatos matematikatanulás. 1. rész, In: *Módszertani lapok.* Alsó tagozat. 3. évf. 2. sz. 17–18.

Radnainé Szendrei Julianna (1997): Az alsó tagozatos matematikatanulás. 2. rész, In: *Módszertani lapok.* Alsó tagozat. 3. évf. 3. sz. 4–8.

Hunyady Györgyné – R. Szendrei Júlia (1998): A hatosztályos gimnáziumok felvételi vizsgájának tényleges és szimbolikus szerepe. In: Új pedagógiai Szemle. 48. 2. 78–96.

Szendrei Julianna (2002): Matematika. Az Eötvös József Szabadelvű pedagógiai Társaság 2002 tervezete. In: Új pedagógiai szemle. 52. évf. (december) melléklet. 33–46.

Julianna Szendrei – Judit Szitányi: Intereses y sentimientos (Érdekek és érzelmek) ¿Qué dificultades tiene el desarrollo de la mentalización hacia las probabilidades en la escuela primaria? (Miért nehéz a valószínűségszámítás tanítása kisiskolás korban). In: *Probabilidades*, UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas. Graó, Barcelona 2007. 31–47.

Szendrei, J. – Korándi, J – Ambrus, A. (2007): *La formazione degli insegnanti di matematica in Ungheria.* 563–584. Bollettino U.M.I., Sezione A, La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie VIII, Vol.X-A, Dicembre.

Ismeretterjesztő cikk

C. Neményi Eszter – Szendrei Julianna – Varga Tamás (1977, 1978, 1979, 1980): Építsük fel a matematikát (Harmincrészes tévésorozat, adásonként 50 perc). Magyar Televízió, Budapest.

C. Neményi Eszter – Herczeg János – Szendrei Julianna – Varga Tamás (1977, 1978, 1979): Új matekot tanul a gyerek (Rádiósorozat). Magyar Rádió, Budapest.

C. Neményi Eszter – Herczeg János – Szendrei Julianna – Varga Tamás (1977, 1978, 1979): Katedra (Rádiósorozat). Magyar Rádió, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna (1977): Van egy ötleted? Játsszunk matematikát! (Tizenegyrészes televízió-sorozat kisiskolásoknak, adásonként 30-30 perc). Magyar Televízió, Budapest.

Schüttler Tamás (2006): Használható tudást vagy lebutított tudományt? Utak és tévutak a természettudományi és matematikai nevelésben. Szerkesztőségi beszélgetés. Új Pedagógiai Szemle. LVI. évfolyam. 2006/május 55–71. oldal (A beszélgetés résztvevői voltak: Brassói Sándor OM, Horányi Gábor Lauder iskola igazgatója, Radnóti Katalin ELTE TTK, Szendrei Julianna ELTE TÓFK. A szerkesztőség részéről Balázs Éva és Schüttler Tamás.)

Knausz Imre (2008): „Én őket nem tudom megtanítani tanítani". Szendrei Juliannával, az ELTE Tanító- és Óvóképző Főiskolai Kara tanszékvezető főiskolai tanárával Knausz Imre beszélgetett a pedagógusképzésről 2008/3. (46. szám) 3–11.

Felsőoktatási tankönyv, jegyzet

Radnainé Szendrei Julianna (1996): Geometria. In: Beliczky et al.: *Matematika. Feladatgyűjtemény az általános képzéshez a tanítóképző főiskolák számára*. 92–99, 226–250. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter – R. dr. Szendrei Julianna (1997): *Szöveges feladatok*. Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest.

C. Neményi Eszter – Szendrei Julianna: *A számolás tanítása. Tantárgy-pedagógiai füzetek*, Budapest, ELTE TÓFK, OKKER, 2006. 275 p.

Radnainé dr. Szendrei Julianna (1996, szerk.): *A természetes szám fogalmának alakítása.* Budapesti Tanítóképző Főiskola. ELTE, Budapest.

Radnainé dr. Szendrei Julianna (1996, szerk.): *A számolás tanítása*. Budapesti Tanítóképző Főiskola. ELTE, Budapest.

Radnainé dr. Szendrei Julianna (1997, szerk.): *Összefüggések, függvények, sorozatok; Törtek, negatív számok*. Budapesti Tanítóképző Főiskola. ELTE, Budapest.

Radnainé dr. Szendrei Julianna (1998, szerk.): *Geometria*. Budapesti Tanítóképző Főiskola. ELTE, Budapest.

Radnainé dr. Szendrei Julianna (2001, szerk.): *Ezredforduló, műveltségkép, kisgyermekkori nevelés.* ELTE Tanító- és Óvóképző Főiskolai Kara. Trezor Kiadó, Budapest.

Radnainé dr. Szendrei Julianna (2003, szerk.): *Matematika; segédanyag az esti tanítóképzéshez.* Budapesti Tanítóképző Főiskola. ELTE, Budapest.

Lexikoncikk

Címszavak az Online Pedagógiai Lexikonban /főszerk.: Báthory Zoltán – Falus Iván/

Tantervek, programok

C. Neményi Eszter – Radnainé Szendrei Julianna – Varga Tamás (1977): Matematika tanterv az általános iskolák 1–8. osztályai számára. In: Dr. Szebenyi Péter (főszerk.): *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve.* Oktatási Minisztérium, Művelődési Minisztérium, Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna (1985): Műszaki szakközépiskolák matematika tanterve (valamennyi szakcsoport részére) In: Szűcs Barna (szerk.): *Műszaki szakközépiskolák nevelési és oktatási terve.* Művelődési Minisztérium, Budapest.

Nemzeti Alaptanterv 1995. *Matematika*. Oktatási Minisztérium (A Matematikai Szakmai Műhely tagjaként), Budapest.

Radnainé Szendrei Julianna és szerzőtársai (1996): *Helyi tanterv (matematika, részlet) A helyi tanterv készítésétől a tanítási óráig*. Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest.

Nemzeti Alaptanterv 2003. *Matematika. Oktatási Minisztérium (A Matematikai Szakmai Műhely tagjaként)*, Melléklet a 243/2003. (XII. 17.) kormányrendelethez, Budapest.

Nemzeti Alaptanterv 2007. *Matematika. Oktatási Minisztérium (A Matematikai Szakmai Műhely tagjaként)*, Melléklet a 202/2007 (VII.31.) kormányrendelethez, Budapest.

Szendrei Julianna a *HEFOP-3.1.1-K-2004-08-0001/1.0 Kompetencia alapú képzés és oktatás projekt* Matematika Bizottságának tagja volt.

Szendrei Julianna *A NAT* 2007 Matematika Szakmai Bizottság vezetője, a kerettanterv szerkesztője volt.